4.3. Translation Theorems

라플라스 변환을 구하기 위해 정의 4.1.1의 적분을 매번 수행하는 것은 비효율적이다. 여기서는 라플라스 변환과 관련된 노동-절감형 정리들에 대해 알아본다.

4.3.1. Translation on the *s*-axis

$\pounds\{f(t)\}=F(s)$를 알면 함수 f의 지수함수배에 해당하는 함수의 라플라스 변환, 즉 $\pounds\{e^{at}f(t)\}$는 $F(s)$를 $F(s-a)$와 같이 *이동(translating/shifting)*시키는 것 이외의 다른 노력을 들이지 않고 쉽게 구할 수 있다. 이 결과는 **첫번째 이동 정리(first translation theorem / first shifting theorem)**로 알려져 있다.

Theorem 4.3.1. First Translation Theorem
만일 $\pounds\{f(t)\}=F(s)$이고 a가 임의의 실수라면, $\pounds\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$.

[Proof] 정의 4.1.1에 의해 $\pounds\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt=F(s-a)$ ■

실변수 s를 고려하면 $F(s-a)$의 그래프는 $F(s)$의 그래프를 s축 상에서 a만큼 이동시킨 것이다 (그림 4.3.1 참고). 의미상으로 명확하게 하면 $\pounds\{e^{at}f(t)\}=\pounds\{f(t)\}_{s\to s-a}$

[Example 1]

(a) $\pounds\{e^{5t}t^3\}$ (b) $\pounds\{e^{-2t}\cos 4t\}$ 을 구하여라

Sol. (a) $\pounds\{e^{5t}t^3\}=\pounds\{t^3\}_{s\to s-5}=\left.\dfrac{3!}{s^4}\right|_{s\to s-5}=\dfrac{6}{(s-5)^4}$

(b) $\pounds\{e^{-2t}\cos 4t\}=\pounds\{\cos 4t\}_{s\to s-(-2)}=\left.\dfrac{s}{s^2+4^2}\right|_{s\to s+2}=\dfrac{s+2}{(s+2)^2+16}$ ■

☐ Inverse Form of Theorem 4.3.1

$F(s-a)$의 역변환을 구하기 위해서는 우선 $F(s)$ 인식 후 이의 역변환을 통해 $f(t)$를 구하고, 지수함수 e^{at}를 곱하는 과정을 통하면 된다.

$$\pounds^{-1}\{F(s-a)\}=\pounds^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\}=e^{at}f(t) \qquad (1)$$

[Example 2]

(a) $\pounds^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$ (b) $\pounds^{-1}\left\{\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\}$ 을 구하여라

Sol. (a) $\frac{2s+5}{(s-3)^2}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{(s-3)^2}$ → $2s+5=A(s-3)+B$ → $A=2,\ B=11$

$\pounds^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}=2\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}+11\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}$ 이다. $1/(s-3)^2$ 은 $F(s)=1/s^2$ 이 s축 양의 방향으로 3만큼 이동한 것으로 볼 수 있다. $\pounds^{-1}\{1/s^2\}=t$ 이므로

$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}=\pounds^{-1}\left\{\left.\frac{1}{s^2}\right|_{s\to s-3}\right\}=e^{3t}t$ 이다. 따라서 $\pounds^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}=2e^{3t}+11e^{3t}t$

(b) $\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}$ 의 분모는 실수의 영점값이 없어 실수 범위에서 인수분해가 불가능하다. 이 경우 $\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}=\frac{s/2+5/3}{(s+2)^2+2}$처럼 표현 가능하며 s^2의 s대신 $s+2$가 대입된 셈이다.

따라서 분자도 비슷하게 $\frac{1}{2}s+\frac{5}{3}=\frac{1}{2}(s+2)+\frac{5}{3}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}(s+2)+\frac{2}{3}$와 같이 표현해 보면,

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\}=\frac{1}{2}\pounds^{-1}\left\{\frac{(s+2)}{(s+2)^2+2}\right\}+\frac{2}{3}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t \ \blacksquare$$

[Example 3]

$y''-6y'+9y=t^2e^{3t},\quad y(0)=2,\ y'(0)=17$ 을 풀어라.

Sol. 양변에 라플라스 변환을 취하면

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-6\left[sY(s)-y(0)\right]+9Y(s)=\pounds\left\{t^2e^{3t}\right\}$$

$$(s-3)^2Y(s)-2s-17+12=\left.\frac{2}{s^3}\right|_{s\to s-3} \rightarrow (s-3)^2Y(s)=2s+5+\frac{2}{(s-3)^3}$$

따라서 $Y(s)=\frac{2s+5}{(s-3)^2}+\frac{2}{(s-3)^5}$ 이다. 이 식의 첫째 항은 예제 2에서 이미 구하였다.

그러므로 $y(t) = \pounds^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{(s-3)^2} + \dfrac{2}{(s-3)^5}\right\} = 2e^{3t} + 11e^{3t}t + \pounds^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s-3)^5}\right\}$

그런데 $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s-3)^5}\right\} = \dfrac{2}{4!}\pounds^{-1}\left\{\dfrac{4!}{(s-3)^{4+1}}\right\} = \dfrac{2}{24}\pounds^{-1}\left\{\left.\dfrac{4!}{s^5}\right|_{s\to s-3}\right\} = \dfrac{1}{12}t^4e^{3t}$ 이므로

따라서 $y(t) = 2e^{3t} + 11te^{3t} + \dfrac{1}{12}t^4e^{3t}$ ■

[Example 4]

$y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$ 을 풀어라.

Sol. 양변에 라플라스 변환을 취하면

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4\left[sY(s) - y(0)\right] + 6Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$\left(s^2+4s+6\right)Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)} \ \rightarrow \ Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)\left(s^2+4s+6\right)}$$

부분분수로 전개 시 다음과 같은 형태이어야 한다.

$$\frac{2s+1}{s(s+1)\left(s^2+4s+6\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+E}{s^2+4s+6}$$

필요한 상수들을 구하여 정리하면 $Y(s) = \dfrac{1/6}{s} + \dfrac{1/3}{s+1} + \dfrac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}$

위 식의 우변 마지막 항의 역변환은 예제 2의 (b)와 같다. 따라서 전체의 역변환은

$$y(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t \ ■$$

4.3.2. Translation on the *t*-axis

□ Unit Step Function

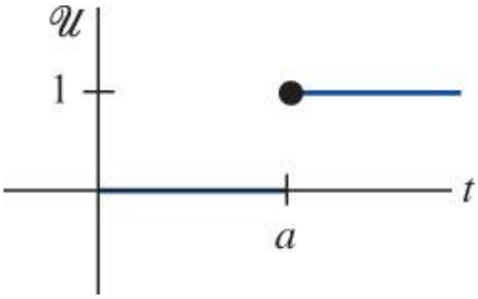
공학에서 “off” 혹은 “on” 함수들을 자주 직면하게 된다. 예를 들어 기계시스템에 가해지는 외력 혹은 회로에 가해지는 전압 등은 일정 시간 후 꺼질 수 있다. 그러면 어떤 $t = a$ 시간까지는 0 (off) 이며 그 시간 이후부터 1 (on) 인 값을 가지는 특별한 함수를 정의하면 편리하다. 이를 **단위 계단 함수 (unit step function)** 혹은 **헤비사이드 함수 (Heaviside function)** 라 한다.

Definition 4.3.1. Unit Step Function

단위 계단함수 (unit step function) $\mathcal{U}(t-a)$는 다음과 같이 정의된다.

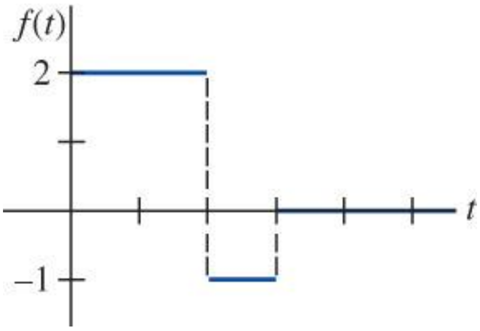
$$\mathcal{U}(t-a)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ 1, & t\ge a\end{cases}$$

위에서 $\mathcal{U}(t-a)$를 음이 아닌 t 축 상에서만 정의했는데, 이는 우리가 라플라스 변환을 다루기 때문이다. 이 그래프는 그림 4.3.2와 같다.



$t\ge 0$에서 정의된 함수 f에 $\mathcal{U}(t-a)$를 곱하면, 단위 계단함수는 그 함수의 일부를 꺼주게("turn off") 된다. 예를 들어 $f(t)=2t-3$ 의 $0\le t<1$ 부분을 꺼주고 싶으면 간단히 $(2t-3)\mathcal{U}(t-1)$과 같이 만들 수 있다 (그림 4.3.3 참조).

단위 계단함수는 또한 부분적으로 정의된 함수들을 간단하게 표현하는 데 사용될 수 있다. 예를 들어 **그림 4.3.4와 같은 함수는 $f(t)=2-3\mathcal{U}(t-2)+\mathcal{U}(t-3)$ 과 같이 표현**된다.



또한 일반적으로 아래와 같은 부분적으로 정의된 함수는

$$f(t)=\begin{cases}g(t), & 0\le t<a\\ h(t), & t\ge a\end{cases}\quad (9)\quad \rightarrow\quad f(t)=g(t)-g(t)\mathcal{U}(t-a)+h(t)\mathcal{U}(t-a)\quad (10)$$

유사하게

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ g(t), & a\le t<b\\ 0, & t\ge b\end{cases}\quad (11)\quad \rightarrow\quad f(t)=g(t)\,[\mathcal{U}(t-a)-\mathcal{U}(t-b)]\quad (12)$$

[Example 5]

$f(t)=\begin{cases} 20t, & 0 \le t < 5 \\ 0, & t \ge 5 \end{cases}$ 을 단위 계단함수로 표현하고, 그래프를 그려라.

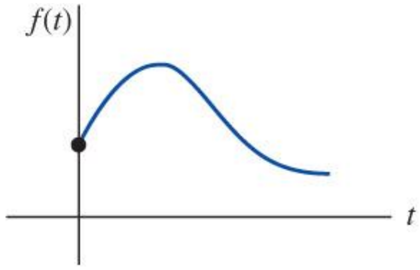
Sol. 그래프는 그림 4.3.5와 같다. 위 식 (9), (10)를 참고하면 $a=5, g(t)=20t, h(t)=0$ 이므로,

$f(t)=20t-20t\,\mathcal{U}(t-5)$ ■

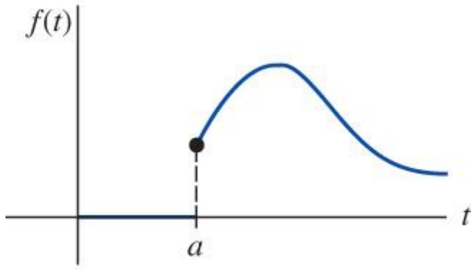
$t \ge 0$에서 정의된 일반적인 함수 $y=f(t)$를 고려해 보자. 부분적으로 정의된 함수

$$f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)=\begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ f(t-a), & t \ge a \end{cases} \tag{13}$$

는 앞으로 전개될 논의에 중요한 역할을 한다. 그림 4.3.6처럼 $a>0$에 대해 $y=f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$의 그래프는 $t \ge a$ 에서의 $y=f(t-a)$의 그래프 (즉 $y=f(t)$, $t \ge 0$ 의 전체 그래프가 a 만큼 t 축의 양의 방향으로 이동한 것) 와 일치하지만, $0 \le t < a$ 에서는 0이다.



(a) $f(t), t \ge 0$



(b) $f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)$

정리 4.3.1에서 $f(t)$의 지수함수배는 변환 $F(s)$의 s축 상에서의 이동과 같음을 보았다. 이제 다음 정리의 결과로 $F(s)$에 지수함수 $e^{-as}, a>0$ 가 곱해질 때마다, 이 함수 $e^{-as}F(s)$의 역변환은 그림 4.3.6에 나타난 방식대로 함수 f가 t축 상에서 이동된 것임을 보게 된다. 이 결과는 **두번째 이동 정리 (second translation theorem / second shifting theorem)** 라고 한다.

Theorem 4.3.2. Second Translation Theorem

만일 $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ 이고 $a>0$ 이면, $\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\}=e^{-as}F(s)$.

[Proof] $\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^a e^{-st} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)dt$

$$= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt$$

$v = t-a$ 로 놓으면 $dv = dt$ 이므로

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)dv = e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv} f(v)dv = e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(t)\} \quad \blacksquare$$

종종 단위 계단함수 자체만의 라플라스 변환을 구할 필요가 있다. 이는 정의 4.1.1 혹은 정리 4.3.2로부터 얻을 수 있다. 정리 4.3.2에서 $f(t) = 1$로 놓으면, $f(t-a) = 1$, $F(s) = \mathcal{L}\{1\} = 1/s$ 이므로

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \qquad (14)$$

[Example 6]

그래프가 그림 4.3.4와 같은 함수 f의 라플라스 변환을 구하여라.

Sol. 단위 계단함수로 f를 표현하면 $f(t) = 2 - 3\mathcal{U}(t-2) + \mathcal{U}(t-3)$이고, 위 식 (14) 에 의해

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\,\mathcal{L}\{1\} - 3\,\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-2)\} + \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-3)\}$$

$$= \frac{2}{s} - \frac{3e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} \quad \blacksquare$$

☐ Inverse Form of Theorem 4.3.2

만일 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ 이면, $a > 0$ 일 때 정리 4.3.2의 역은

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a) \qquad (15)$$

[Example 7]

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\}$ 을 구하여라.

Sol. (a) $a = 2$임을 인식하면, $F(s) = 1/(s-4)$에 해당하고 이의 역변환은 $f(t) = e^{4t}$ 이므로 이를 t 축에서 2만큼 이동한 셈이다. 이 때 단위 계단함수가 수반되어 따라옴에 유의하자. 따라서

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\} = e^{4(t-2)}\,\mathcal{U}(t-2)$$

(b) $a = \pi/2$임을 인식하면, $F(s) = s/(s^2+9)$에 해당하고 이의 역변환은 $f(t) = \cos 3t$ 이므로

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\}=\cos 3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 3t\,\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\ \blacksquare$$

☐ Alternative Form of Theorem 4.3.2

우리는 종종 함수 g와 단위 계단함수 $\mathcal{U}(t-a)$의 곱 형태인 $g(t)\mathcal{U}(t-a)$의 라플라스 변환을 구할 필요가 있다. 이 때 정리 4.3.2를 이용하려면 보통 대수적 조작을 통해 $g(t)$를 $f(t-a)$ 형태로 고쳐 주어야 한다. 예를 들어, $t^2\mathcal{U}(t-2)$의 라플라스 변환을 위해 $t^2=(t-2)^2+4(t-2)+4$ 임을 이용하면

$$\mathcal{L}\{t^2\,\mathcal{U}(t-2)\}=\mathcal{L}\{(t-2)^2\,\mathcal{U}(t-2)+4(t-2)\,\mathcal{U}(t-2)+4\,\mathcal{U}(t-2)\}=\frac{2e^{-2s}}{s^3}+\frac{4e^{-2s}}{s^2}+\frac{4e^{-2s}}{s}$$

와 같이 구할 수 있다. 그러나 이러한 조작은 시간이 소요되며 때때로 명확하지가 않은 경우가 있으므로 정리 4.3.2의 다른 버전을 고안하는 편이 더 간단하다. 정의 4.1.1과 단위 계단함수 $\mathcal{U}(t-a)$의 정의를 이용하고, $u=t-a$라고 치환하면

$$\mathcal{L}\{g(t)\,\mathcal{U}(t-a)\}=\int_a^\infty e^{-st}g(t)dt=\int_0^\infty e^{-s(u+a)}g(u+a)du$$ 이다. 즉,

$$\mathcal{L}\{g(t)\,\mathcal{U}(t-a)\}=e^{-as}\,\mathcal{L}\{g(t+a)\} \qquad (16)$$

식 (16)을 이용해 위 문제를 다시 풀어보면 $a=2$이고 $g(t)=t^2$ 이므로,

$\mathcal{L}\{t^2\,\mathcal{U}(t-2)\}=e^{-2s}\,\mathcal{L}\{(t+2)^2\}=e^{-2s}\,\mathcal{L}\{t^2+4t+4\}=e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s}\right)$ 이므로, 앞서와 동일한 결과에 도달한다.

[Example 8]

$\mathcal{L}\{\cos t\,\mathcal{U}(t-\pi)\}$를 구하여라.

Sol. $g(t)=\cos t,\ a=\pi$ 이면 $g(t+\pi)=\cos(t+\pi)=-\cos t$ 이다. 식 (16)을 적용하면,

$$\mathcal{L}\{\cos t\,\mathcal{U}(t-\pi)\}=-e^{-\pi s}\,\mathcal{L}\{\cos t\}=-\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\ \blacksquare$$

[Example 9]

$y'+y=f(t),\quad y(0)=5,\quad f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\pi\\ 3\cos t, & t\ge\pi\end{cases}$ 를 풀어라.

Sol. 우변의 f는 $f(t)=3\cos t\,\mathcal{U}(t-\pi)$와 같이 표현 가능하다. 양변을 라플라스 변환하면

$sY(s)-y(0)+Y(s)=-3\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}$ (예제 8 참조) → $(s+1)Y(s)=5-\frac{3s}{s^2+1}e^{-\pi s}$

$$Y(s)=\frac{5}{s+1}-\frac{3s}{(s+1)(s^2+1)}e^{-\pi s}$$ 이며, 두번째 항을 부분분수 전개하여 정리하면

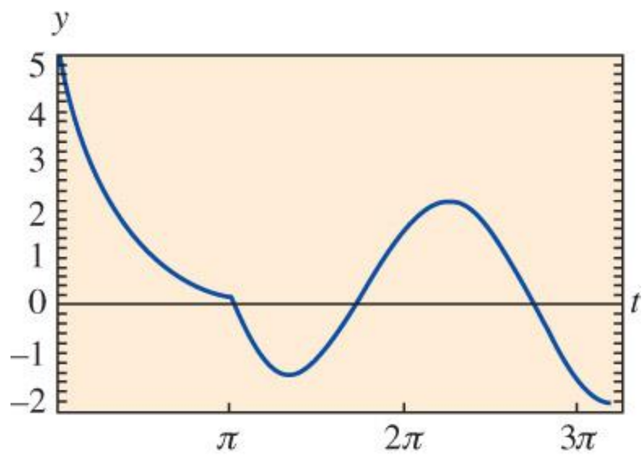
$$Y(s)=\frac{5}{s+1}-\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}\right]e^{-\pi s}$$ 이다. 역변환을 취하면

$$y(t)=5e^{-t}-\frac{3}{2}\left[-e^{-(t-\pi)}+\sin(t-\pi)+\cos(t-\pi)\right]\mathcal{U}(t-\pi)$$

$$=5e^{-t}+\frac{3}{2}\left[e^{-(t-\pi)}+\sin t+\cos t\right]\mathcal{U}(t-\pi)$$

$$=\begin{cases}5e^{-t}, & 0\le t<\pi\\ 5e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}+\frac{3}{2}\sin t+\frac{3}{2}\cos t, & t\ge\pi\end{cases}$$

이 함수의 그래프는 그림 4.3.7과 같다.



☐ Beams

4.4. Additional Operational Properties

여기서는 라플라스 변환과 관련된 몇 가지 조작적 성질들에 대해 알아본다.

4.4.1. Derivatives of Transforms

□ Multiplying a Function by t^n

함수 $f(t)$와 t의 곱의 라플라스 변환은 $f(t)$의 라플라스 변환을 미분하여 얻을 수 있다. $F(s) = £\{f(t)\}$ 이고 미분과 적분의 순서가 교환 가능하다고 가정하면,

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st} f(t)\right]dt = -\int_0^\infty e^{-st} tf(t)dt = -£\{tf(t)\};\ 즉,$$

$$£\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}£\{f(t)\}$$

유사하게 $£\{t^2 f(t)\} = £\{t\cdot tf(t)\} = -\frac{d}{ds}£\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}£\{f(t)\}\right) = \frac{d^2}{ds^2}£\{f(t)\}$

이 두 경우를 확장하여 다음 정리를 얻을 수 있다.

> **Theorem 4.4.1. Derivative of Transforms**
>
> 만일 $F(s) = £\{f(t)\}$ 이고 $n = 1, 2, 3, \ldots$이면, $£\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$.

[Example 1]

$£\{t\sin kt\}$ 를 구하여라.

Sol. $f(t) = \sin kt$ 로 보면 $F(s) = k/(s^2+k^2)$ 이고, 정리 4.4.1에서 $n=1$ 인 경우이므로

$$£\{t\sin kt\} = -\frac{d}{ds}£\{\sin kt\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2} \quad ■$$

만일 $£\{t^2\sin kt\}$ 를 구하고 싶으면 위 예제 1의 결과를 s로 미분한 후 음부호를 붙이면 되고, $£\{t^3\sin kt\}$ 은 이 결과에 대해 같은 방법을 적용하면 된다. $£\{t^n e^{at}\}$와 같은 예의 경우를 보면,

정리 4.3.1을 이용하는 경우: $£\{te^{3t}\} = £\{t\}_{s\to s-3} = 1/s^2\big|_{s\to s-3} = 1/(s-3)^2$

정리 4.4.1을 이용하는 경우: $£\{te^{3t}\} = -\frac{d}{ds}£\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\left[1/(s-3)\right] = 1/(s-3)^2$

[Example 2]

$x''+16x=\cos 4t, \quad x(0)=0, \ x'(0)=1$ 을 풀어라.

Sol. 위 초기값 문제는 스프링/질량 시스템의 강제 비감쇠 공진 운동을 표현하는 미방이라 해석할 수 있다. 질량은 평형점 아래쪽으로 1 m/s (or ft/s)의 속도로 운동하기 시작한다고 볼 수 있다. 주어진 식의 양변에 라플라스 변환을 취하면

$$\left(s^2+16\right)X(s)=1+\frac{s}{s^2+16} \rightarrow X(s)=\frac{1}{s^2+16}+\frac{s}{\left(s^2+16\right)^2}$$

예제 1에서 $\pounds^{-1}\left\{\frac{2ks}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}=t\sin kt$ 이므로, 이를 적용하면

$$x(t)=\frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\}+\frac{1}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{8s}{\left(s^2+16\right)^2}\right\}=\frac{1}{4}\sin 4t+\frac{1}{8}t\sin 4t \quad \blacksquare$$

4.4.2. Transforms of Integrals

□ Convolution

함수 f와 g가 [0, ∞)에서 부분적으로 연속이면, 함수의 특수한 곱 $f*g$는 다음 적분으로 정의된다.

$$f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad (2)$$

이를 f와 g의 **합성적(合成積, convolution)**이라 한다. 위 식 (2)의 적분은 τ에 대해 수행하게 되므로 합성적 $f*g$는 결국 t의 함수이다.

[Example 3]

(a) $e^t*\sin t$

Sol. $f(t)=e^t, \ g(t)=\sin t$ 라 하면 $f(\tau)=e^t, \ g(t-\tau)=\sin(t-\tau)$

$$e^t*\sin t=\int_0^t e^\tau\sin(t-\tau)d\tau=e^\tau\sin(t-\tau)\Big|_0^t-\int_0^t e^\tau\left(-\cos(t-\tau)\right)d\tau$$

$$=-\sin t+\int_0^t e^\tau\cos(t-\tau)d\tau=-\sin t+e^\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t-\int_0^t e^\tau\sin(t-\tau)d\tau$$

$$=-\sin t+e^t-\cos t-\int_0^t e^\tau\sin(t-\tau)d\tau$$

따라서 $2\int_0^t e^\tau\sin(t-\tau)d\tau=-\sin t+e^t-\cos t$

$$e^t*\sin t=\frac{1}{2}\left(-\sin t-\cos t+e^t\right) \qquad (3) \ \blacksquare$$

$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ 가 성립하므로, $f * g = g * f$ 이다. 이는 두 함수의 합성적은 가환적(commutative, =교환법칙이 성립함)임을 의미한다.

☐ Convolution Theorem

함수들의 곱의 적분은 함수의 적분들을 곱한 것과는 같지 않다. 그러나 특수한 곱 (2)의 라플라스 변환은 각 f와 g의 라플라스 변환들의 곱과 같아진다. 이는 두 함수의 합성적의 라플라스 변환은 실제 식 (3)과 같은 적분을 수행하지 않고도 알아낼 수 있음을 의미한다. 이와 관련된 정리는 **합성적 정리(convolution theorem)**로 알려져 있다.

Theorem 4.4.2. Convolution Theorem

만일 $f(t)$와 $g(t)$가 $[0, \infty)$에서 부분적으로 연속이고 지수적 차수이면,

$$\pounds\{f * g\} = \pounds\{f(t)\}\,\pounds\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

[Proof] $F(s) = \pounds\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$, $G(s) = \pounds\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)d\beta$ 라 하자.

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)d\beta\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau)g(\beta)d\tau d\beta$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} g(\beta)d\beta$$

τ 를 고정시키고 $t = \tau + \beta$ 로 놓으면 $dt = d\beta$ 이므로

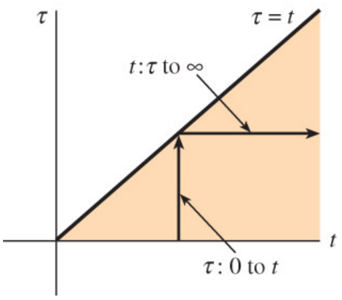
$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau)dt$$

(참고) Kreyszig 교과서의 유도 과정

$$e^{-s\tau}G(s) = \pounds\{g(t-\tau)u(t-\tau)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t-\tau)u(t-\tau)dt = \int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau)dt$$

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\right)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}G(s)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau)dtd\tau$$

위 식의 우변 적분을 $t\tau$-평면상의 면적분과 같이 해석한다. 먼저 위의 적분은 ***그림 4.4.1***의 색칠된 면적에 대해 적분하는 것과 같으며, 순서는 ① t를 변수로 하여 우선 τ에서 ∞까지 적분한 후(가로줄 형성), ② τ를 0부터 ∞까지 변화시키는(세로로 sweep) 것과 같다.



그런데 이 적분의 순서를 ①′ τ를 변수로 하여 우선 0에서 t까지 적분한 후(세로줄 형성), ②′ t를 0부터 ∞까지 변화시키는(가로로 sweep) 방식으로 바꾸어 주어도 같은 면적에 대한 면적분을 나타내게 된다. f와 g는 $[0, \infty)$에서 부분적 연속이고 지수적 차수이므로, 적분의 순서를 바꾸는 것이 가능하다:

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}dt = \pounds\{f * g\} \quad \blacksquare$$

[Example 4]

$\pounds\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau\right\}$를 구하여라.

Sol. $f = e^t$, $g = \sin t$라 하면 {} 안의 식은 $f * g$와 같다. 따라서

$$\pounds\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau\right\} = \pounds\{e^t\}\cdot\pounds\{\sin t\} = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} \quad \blacksquare$$

□ Inverse Form of Theorem 4.4.2

합성적 정리는 때로 두 라플라스 변환식의 곱 형태의 라플라스 역변환을 구할 때 사용된다.

$$\pounds^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g \tag{4}$$

[Example 5]

$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\}$를 구하여라.

Sol. $F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2+k^2}$라 하면, $f(t) = g(t) = \frac{1}{k}\pounds^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \frac{1}{k}\sin kt$

위 식 (4)에 의하면 $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = f * g = \frac{1}{k^2}\int_0^t \sin k\tau \sin k(t-\tau)d\tau$ (교과서 오류!)

$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$의 공식을 이용하면

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k^2}\int_0^t[\cos k(2\tau-t) - \cos kt]d\tau = \frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{2k}\sin k(2\tau-t) - \tau\cos kt\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{2k}\sin kt - \frac{1}{2k}\sin(-kt) - (t\cos kt - 0)\right] = \frac{\sin kt - kt\cos kt}{2k^3}$$

☞ $2k^3$을 위 식 양변에 곱하면 식 (5)와 같은 공식이 얻어진다 (부록 III, 테이블 25번째)

$$\pounds\left\{\sin kt - kt\cos kt\right\} = \frac{2k^3}{\left(s^2+k^2\right)^2} \qquad (5) \qquad ■$$

☐ Transform of an Integral

$g(t)=1$이고 $\pounds\left\{g(t)\right\}=G(s)=1/s$ 일 때, 합성적 정리에 의하면 f의 적분의 라플라스 변환은

$$\pounds\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \qquad (7)$$

위 식 (7)의 역의 형태는

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = \pounds^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} \qquad (8)$$

식 (8)은 s^n 이 분모에 있고 $f(t)$가 적분이 쉬울 경우, 부분분수 대신 사용할 수 있다. 예를 들어

$f(t)=\sin t \;\rightarrow\; F(s)=1/\left(s^2+1\right)$ 인 경우, 식 (8)에 의해 아래의 결과들을 얻을 수 있다.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1/\left(s^2+1\right)}{s}\right\} = \int_0^t \sin\tau d\tau = 1-\cos t$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1/s\left(s^2+1\right)}{s}\right\} = \int_0^t \left(1-\cos\tau\right)d\tau = t-\sin t$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1/s^2\left(s^2+1\right)}{s}\right\} = \int_0^t \left(\tau-\sin\tau\right)d\tau = \frac{1}{2}t^2-1+\cos t$$

☐ Volterra Integral Equations

합성적 정리와 식 (7)의 결과는 미지의 함수가 적분 안에 들어간 형태로 표현되는 또다른 형태의 방정식을 푸는데 유용하다. 다음 예제에서 $f(t)$에 대한 **볼테라 적분방정식(Volterra integral equation)**

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (9)$$

을 풀어본다.

[Example 6]

$f(t)=3t^2-e^{-t}-\int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}d\tau$ 를 $f(t)$에 대해 풀어라.

Sol. 식 (9) 와 비교하면 $h(t-\tau)=e^{t-\tau}$ 이므로 $h(t)=e^{t}$ 이다. 양변에 라플라스 변환을 취하면

$F(s)=3\cdot\frac{2!}{s^3}-\frac{1}{s+1}-F(s)\cdot\frac{1}{s-1}$ 이다. $F(s)$ 에 대해 정리하고 부분분수로 전개하면

$F(s)=\frac{6}{s^3}-\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}$ 이다. 라플라스 역변환을 취하면 $f(t)=3t^2-t^3+1-2e^{-t}$ ■

☐ Series Circuits

앞 장들에서의 회로 문제에서 커패시터의 전압은 전류가 아닌 전하 q로 표시하였다. 이제 적분을 이용하여 커패시터의 전압을 전류로 표현할 수 있기 때문에, 저항/인덕터/커패시터 양단의 전압은

$$L\frac{di}{dt},\qquad Ri(t),\qquad \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

따라서 그림 4.4.2의 *LRC* 직렬 회로의 방정식은 다음 **미적분방정식 (integrodifferential equation)** 으로 씌여진다.

$$L\frac{di}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau=E(t) \tag{10}$$

[Example 7]

단일 *LRC* 루프의 L = 0.1 H, R = 2 Ω, C = 0.1 F이고 $i(0)$ = 0이며 인가 전압이 $E(t) = 120t - 120t\mathscr{U}(t-1)$ 일 때, 회로에 흐르는 전류 $i(t)$를 구하여라.

Sol. 식 (10)에 의해 회로방정식은 $0.1\frac{di}{dt}+2i+10\int_0^t i(\tau)d\tau=120t-120t\,\mathscr{U}(t-1)$

양변에 라플라스 변환을 취하면 $0.1sI(s)+2I(s)+10\frac{I(s)}{s}=120\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-s}\right]$

식의 양변에 $10s$를 곱하고, $s + 20s + 100 = (s+10)^2$을 사용하여 $I(s)$에 대해 정리하면

$$I(s)=1200\left[\frac{1}{s(s+10)^2}-\frac{1}{s(s+10)^2}e^{-s}-\frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right]$$

부분분수로 전개하면

$$I(s)=1200\left[\frac{1/100}{s}-\frac{1/100}{s+10}-\frac{1/10}{(s+10)^2}-\frac{1/100}{s}e^{-s}+\frac{1/100}{s+10}e^{-s}+\frac{1/10}{(s+10)^2}e^{-s}-\frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right]$$

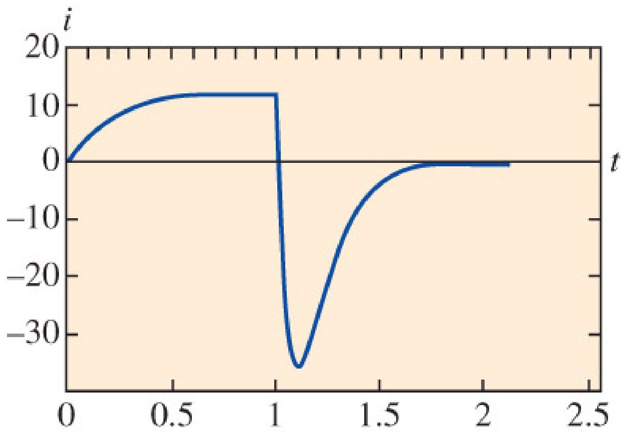
역변환하여 $i(t)$를 구하면

$$i(t)=12[1-\mathscr{U}(t-1)]-12[e^{-10t}-e^{-10(t-1)}\mathscr{U}(t-1)]-120te^{-10t}-1080(t-1)e^{-10(t-1)}\mathscr{U}(t-1)$$

편의를 위해 부분적으로 정의된 함수로 표현하면 전류는

$$i(t)=\begin{cases}12-12e^{-10t}-120te^{-10t}, & 0\le t<1\\ -12e^{-10t}+12e^{-10(t-1)}-120te^{-10t}-1080(t-1)e^{-10(t-1)}, & t\ge 1\end{cases} \quad (11)$$

위 식 (11)을 이용하여 구간을 2개로 나누어 전류의 그래프를 그리면 그림 4.4.3과 같다.



인가전압이 불연속이나 (인덕터의 특성에 의해) 전류가 연속적인 함수가 됨에 주목하라. ■

4.4.3. Transform of a Periodic Function

☐ Periodic Function

주기함수 f가 주기 $T(>0)$를 가지면, $f(t+T)=f(t)$ 이다. 주기함수의 라플라스 변환은 한 주기에 대한 적분을 통해 얻을 수 있다.

Theorem 4.4.3. Transform of a Periodic Function

만일 $f(t)$가 $[0,\infty)$에서 부분적으로 연속이고, 지수적 차수이며, 주기 T의 주기함수이면,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

[Proof] f의 라플라스 변환을 두 개의 적분으로 쓰면 $\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt$

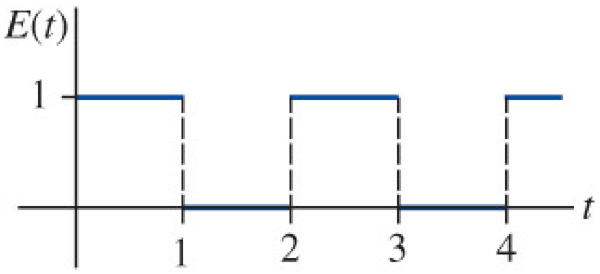
$t=u+T$ 라 하면, 마지막 적분은

$\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-s(u+T)}f(u+T)du=e^{-sT}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du=e^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\}$ 이다. 그러므로

$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+e^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\}$ 이고, 이를 간단히 하면 위 정리의 식을 얻는다. ■

[Example 7]

그림 4.4.4의 주기함수의 라플라스 변환을 구하여라.



Sol. 그림의 $E(t)$는 구형파(square wave)라 하며 주기 $T=2$ 이다. $0 \le t < 2$ 에서 $E(t)$는

$$E(t)=\begin{cases}1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2\end{cases}$$

이고, 이 구간 밖에서는 $f(t+2)=f(t)$ 이다. 따라서 정리 4.4.3으로부터

$$£\{E(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}E(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}\cdot 1dt+\int_1^2 e^{-st}\cdot 0dt\right]$$ (교과서 오타)

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^1=\frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot\frac{1-e^{-s}}{s}=\frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)} \quad \blacksquare$$