공학수학

2차 선형 미분방정식의 풀이

2018년 1학기

4th class

Jihoon Jang

■ 2차 선형 방정식의 표준형태

1. 제차방정식 : $f(x)$가 0인 미분 방정식

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y = 0$$

2. 비제차방정식 : $f(x)$가 0이 아닌 미분 방정식

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y = f(x)$$

■ 2차 선형 방정식의 특성

1. 특성 1 - 선형 독립

○ $y_1(x)$와 $y_2(x)$가 2차 제차 방정식의 선형적으로 독립인 두 해라고 하면 일반해 $y_{\mathrm{H}}(x)$는 아래와 같음

$$y_{\mathrm{H}}(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

A, B는 상수

○ 2차 선형 상 미분 방정식의 일반해는 두 개의 임의 상수를 포함하고 있음

○ 하나의 해가 다른 해의 곱으로 나타낼 수 없으면 함수 $y_1(x)$와 $y_2(x)$는 선형독립((linearly independent)임

■ 2차 선형 방정식의 특성

2. 특성 2 - 보충해와 특수적분

○ $y_P(x)$를 비제차 방정식의 해라고 가정하고, 이 방정식의 일반해를 $y_H(x)$ 라고 할 때, 비제차 방정식의 일반해는 아래와 같다.

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

→ 즉, 비제차 방정식의 일반해를 구하기 위해서는 먼저 그와 관련된 제차 방정식의 일반해($y_P(x)$)를 구해야 함
이를 보충해(complementary function) 라고 함

○ 또한, 특수적분(particular integral)을 구하여 비제차 방정식의 일반해를 구할 수 있음

○ 특수해는 일반해에 특수조건을 대입하여 구할 수 있음

■ 2차 선형 방정식의 특성

○ $y_1(x) = x$ 와 $y_2(x) = 1$ 이 모두 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 을 만족함을 증명하시오.

sol) $y_1(x) = x$ 이면 $\frac{dy}{dx} = 1,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 이므로 만족한다.

$y_2(x) = 1$ 이면 $\frac{dy}{dx} = 0,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 이므로 만족한다.

2차 선형 방정식의 특성 1을 이용하면 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 의 일반해는 다음과 같다.

$y_{\mathrm{H}}(x) = Ax + B(1) = Ax + B$

위 해가 이 방정식이 해임을 보이기 위해서는 다음 절차를 따르면 된다.

$\frac{dy_{\mathrm{H}}}{dx} = A,\ \frac{d^2y_{\mathrm{H}}}{dx^2} = 0$ 이므로, $y_{\mathrm{H}}(x)$는 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 을 충족한다.

■ 2차 선형 방정식의 특성

○ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$ 가 주어졌을 때, 아래 물음에 답하시오.

(a) $y_\mathrm{H}(x) = A\cos x + B\sin x$ 가 위의 제차 방정식의 해임을 증명하시오.

(b) $y_\mathrm{P} = x$가 특수적분임을 증명하시오.

(c) $y_\mathrm{H} + y_\mathrm{P}$가 비제차 방정식을 만족함을 증명하시오.

(a) $y_\mathrm{H}(x) = A\cos x + B\sin x$ 이면,

$y_\mathrm{H}'(x) = -A\sin x + B\cos x$, $y_\mathrm{H}''(x) = -A\cos x - B\sin x$ 가 되며

$y_\mathrm{H}'(x) + y_\mathrm{H}''(x) = 0$이 성립하므로, y_H는 제차 방정식의 해임

(b) $y_\mathrm{P} = x$이면 $y_\mathrm{P}' = 1$, $y_\mathrm{P}'' = 0$ 이며, 이는 방정식을 만족하므로

$y_\mathrm{P} = x$는 특수적분임

(c) $y_\mathrm{H} + y_\mathrm{P} = y = A\cos x + B\sin x + x$ 이므로,

$y' = -A\sin x + B\cos x + 1$, $y'' = -A\cos x - B\sin x$ 이며, 이를 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$대입하면

식이 성립하므로 특성 2에 따라서 비제차 방정식의 해가 됨

2. 2차 선형 방정식의 일반해, 보충해

■ 상수 계수 방정식

: 2차 선형 방정식의 계수가 모두 상수 형태인 방정식

○ 계수가 상수인 2차 선형 방정식의 일반 형태는 아래와 같다.

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x) \qquad a, b, c : \text{상수}$$

위 식의 제차형태는 아래와 같다.

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \qquad a, b, c : \text{상수}$$

2. 2차 선형 방정식의 일반해, 보충해

■ 보충해 구하기

○ 보조 방정식 (auxiliary equation)

$$a\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy = 0$$ 의 보조 방정식은 다음과 같다.

$$ak^2 + bk + c = 0$$

■ 보충해 구하기

○ 보조 방정식

○ $y = e^{kx}$가 아래 식의 해가 되도록 k 값을 구하시오. 또한 일반해를 구하시오.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

sol) $y = e^{kx}$ 를 미분하면 $\frac{dy}{dx} = ke^{kx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = k^2e^{kx}$ 이며, 이를 방정식에 대입하면

$$k^2e^{kx} - ke^{kx} + 6e^{kx} = 0 \quad \rightarrow \quad (k^2 - k + 6)e^{kx} = 0$$

위 식이 모든 x의 값에 만족하기 위해서는 $k^2 - k + 6 = 0$ 가 되어야 함으로

$k = 3\ \ or\ \ k = -2$이다. 따라서 두 가지 해는

$y_1(x) = e^{3x}$와 $y_2(x) = e^{-2x}$ 이다.

위 두 함수는 선형독립이고 따라서 특성 1을 적용하면 아래의 일반해를 얻음

$$y_{\mathrm{H}}(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x}$$

■ 보충해 구하기

○ 보조방정식 근의 종류에 따른 보충해

1) $b^2 > 4ac$ 일 때 : 보조방정식의 근은 실수

보조 방정식의 해가 서로 다른 두 실수 k_1, k_2이면 보충해는

$$y(x) = A\,\mathrm{e}^{k_1 x} + B\,\mathrm{e}^{k_2 x}$$

가 된다.

○ $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 10y = 0$의 일반해를 구하시오.

sol) $y = e^{kx}$ 라 두면 $\frac{dy}{dx} = ke^{kx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = k^2e^{kx}$ 이고 보조방정식은

$k^2 + 3k - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 2,\ k = -5$이며, $y_1(x) = e^{2x}$와 $y_2(x) = e^{-5x}$ 이다.

따라서, 일반해 $y_{\mathrm{H}}(x) = Ae^{2x} + Be^{-5x}$ 이다.

■ 보충해 구하기

○ 보조방정식 근의 종류에 따른 보충해

2) $b^2 < 4ac$ 일 때 : 보조방정식의 근은 복소수 → 오일러의 관계 활용

보조 방정식의 해가 두 복소수 $\alpha + \beta j$, $\alpha - \beta j$이면 보충해는

$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$가 된다.

○ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$의 일반해를 구하시오.

$$k^2 + 4 = 0$$

$$k^2 = -4$$

$$\therefore k = \pm 2j$$

2차 선형 미분 방정식의 일반해

$$y_1 = e^{2jk}, y_2 = e^{-2jk}$$

$$\therefore y(x) = Ae^{2jk} + e^{-2jk}$$

2. 2차 선형 방정식의 일반해, 보충해

■ 보충해 구하기

○ 보조방정식 근의 종류에 따른 보충해

2) $b^2 < 4ac$ 일 때 : 보조방정식의 근은 복소수 → 오일러의 관계 활용

보조 방정식의 해가 두 복소수 $\alpha + \beta j$, $\alpha - \beta j$이면 보충해는

$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$가 된다.

○ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$의 일반해를 구하시오.

오일러의 관계에서

$$e^{2jk} = \cos 2x + j\sin 2x$$

$$e^{-2jk} = \cos 2x - j\sin 2x$$

$$y(x) = A(\cos 2x + j\sin 2x) + B(\cos 2x - j\sin 2x)$$

$$= C\cos 2x + D\sin 2x$$

■ 보충해 구하기

○ 보조방정식 근의 종류에 따른 보충해

2) $b^2 < 4ac$ 일 때 : 보조방정식의 근은 복소수 → 오일러의 관계 활용

○ $ay'' + by' + cy = 0$의 보조방정식의 해가 복소수이고 $k_1 = \alpha + \beta j,\ k_2 = \alpha - \beta j$ 로 나타나면 일반해가 $y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ 임을 증명하시오.

sol) $$y(x) = Ce^{(\alpha+\beta j)x} + De^{(\alpha-\beta j)x}$$

$$= Ce^{\alpha x}e^{\beta jx} + De^{\alpha x}e^{-\beta jx}$$

$$= e^{\alpha x}(Ce^{\beta jx} + De^{-\beta jx})$$

$$= e^{\alpha x}(C\cos\beta x + Cj\sin\beta x + D\cos\beta x - Dj\sin\beta x)$$

$$= e^{\alpha x}\{\underbrace{(C + D)}_{A}\cos\beta x + \underbrace{(Cj - Dj)}_{B}\sin\beta x)$$

■ 보충해 구하기

3. 보조방정식 근의 종류에 따른 보충해

3) $b^2 = 4ac$ 일 때 : 보조방정식의 근은 중근

보조 방정식이 공통근을 가지면 보충해는 다음과 같다.

$$y = A\,e^{k_1 x} + Bx\,e^{k_1 x}$$

■ 보충해 구하기

3. 보조방정식 근의 종류에 따른 보충해

3) $b^2 = 4ac$ 일 때 : 보조방정식의 근은 중근

예제 19.29 $ay'' + by' + cy = 0$의 보조 방정식은 $ak^2 + bk + c = 0$이다. 이 방정식의 공통해가 $k = k_1$이라고 가정하자. $y = x\,e^{k_1 x}$가 이 미분 방정식의 해임을 증명하시오.

$$y = x\,e^{k_1 x} \qquad y' = e^{k_1 x}(1 + k_1 x) \qquad y'' = e^{k_1 x}(k_1^2 x + 2k_1)$$

이다. 이를 미분 방정식의 좌변에 대입하면

$$e^{k_1 x}\{a(k_1^2 x + 2k_1) + b(1 + k_1 x) + cx\} = e^{k_1 x}\{(ak_1^2 + bk_1 + c)x + 2ak_1 + b\}$$

$ek_1{}^x$ 는 0 이 될 수는 없다.

따라서, $\{(ak_1^2 + bk_1 + c)x + 2ak_1 + b\} = 0$ 이라면, 위 방정식은 성립한다.

3. 특수적분

■ 특수적분 (particular integral)

: 비제차 선형 미분 방정식의 해 = 보충해 + 특수적분

$$y(x) = y_{\mathrm{H}}(x) + y_{\mathrm{P}}(x)$$

* 특수적분의 해를 구하는 방식은 다양

그 중 한가지 방법은 시행착오와 추측을 통해서 특수적분을 구하는 방법임

→ 우변인 $f(x)$를 이용하여 특수적분을 구함

3. 특수적분

■ 특수적분을 구하기 위한 시행 해

$f(x)$	*Trial solution*
constant	constant
polynomial in x of degree r	polynomial in x of degree r
$\cos kx$	$a\cos kx + b\sin kx$
$\sin kx$	$a\cos kx + b\sin kx$
$a\,e^{kx}$	$\alpha\,e^{kx}$

■ 특수적분의 풀이

○ $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = e^{2x}$ 의 해를 구하시오.

1. 보충해 구하기

1) 보조 방정식 작성 및 k 값의 계산

: $k^2 - k - 6 = 0 \quad \rightarrow k = 3 \; or \; -2$

2) 보충해 구하기

: $y_H = Ae^{3x} + B^{-2x}$

■ 특수적분의 풀이

○ $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = e^{2x}$ 의 해를 구하시오.

2. 특수적분 구하기

1) $f(x)$ 를 확인하여 y_p 를 설정 : $f(x) = e^{2x}$ 이므로 $y_p = \alpha e^{2x}$

2) y_p 를 방정식에 대입하여 α를 구함 → y_p 를 완성

: $\frac{dy_p}{dx} = 2\alpha e^{2x}$, $\frac{d^2y_p}{dx^2} = 4\alpha e^{2x}$ 를 방정식에 대입하면,

$4\alpha e^{2x} - 2\alpha e^{2x} - 6\alpha e^{2x} = e^{2x}$ → - $4\alpha e^{2x} = e^{2x}$ 이므로 $\alpha = -\frac{1}{4}$

$\therefore\ y_p = -\frac{1}{4} e^{2x}$

3) 따라서, 방정식의 해 : $y(x) = Ae^{3x} + B^{-2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$

3. 특수적분

■ 특수적분의 풀이

○ $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = x$ 의 특수적분을 구하시오.

$if)\ y_p = \alpha x$라 두면, $\frac{dy_p}{dx} = \alpha,\ \frac{d^2y_p}{dx^2} = 0$

$0 - 6\alpha + 8\alpha x = x \rightarrow 6\alpha = 0\ and\ 8\alpha x = x$

$i)\ 6\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow 0 \neq x$

$ii)\ 8\alpha x = x \rightarrow \alpha = \frac{1}{8} \rightarrow 6\alpha \neq 0$

α의 값이 동일하지 않으므로, 특수적분이 될 수 없다.

■ 특수적분의 풀이

○ $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+8y=x$ 의 특수적분을 구하시오.

$if)\ y_p=\alpha x+\beta$ 라 두면 $\rightarrow \frac{dy_p}{dx}=\alpha,\ \frac{d^2y_p}{dx^2}=0$

$$0-6\alpha+8(\alpha x+\beta)=\ x\ \rightarrow 8\alpha x+(8\beta-6\alpha)=x$$

$$i)\ 8\alpha=1\ \rightarrow \alpha=\frac{1}{8}$$

$$ii)\left(8\beta-6\cdot\frac{1}{8}\right)=0\rightarrow \beta=\frac{3}{32}$$

$$\therefore\ y_p=\ \frac{1}{8}x+\ \frac{3}{32}$$

■ 보충해에 나타나는 비제차 항

: 보충해를 구성하는 항들이 비제차 항에서도 나타날 때, 보충해가 중근 형태 일 때 풀이를 이용한다.

○ $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = e^{3x}$ 의 특수적분을 구하고 일반해를 구하시오.

$if)\ y_p = \alpha e^{3x}$으로 두면 우변의 e^{3x}는 보충해의 일부이기 때문에,

좌변이 0 가 되어서 좌변이 사라짐

$\rightarrow y_p \; = \; x\alpha e^{3x}$ 라고 설정

$y_p \; = \; \alpha x e^{3x} \rightarrow y' = \alpha e^{3x}(3x+1),\ y'' = \alpha e^{3x}(9x+6)$

■ 보충해에 나타나는 비제차 항

: 보충해를 구성하는 항들이 비제차 항에서도 나타날 때, 보충해가 중근 형태 일 때 풀이를 이용한다.

○ $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = e^{3x}$ 의 특수적분을 구하고 일반해를 구하시오.

$y_p = \alpha x e^{3x} \rightarrow y' = \alpha e^{3x}(3x+1),\ y'' = \alpha e^{3x}(9x+6)$ 를

방정식에 대입하여 α를 구한다.

$$\alpha e^{3x}(9x+6) - \alpha e^{3x}(3x+1) - 6\alpha x e^{3x} = e^{3x}$$

$$5\alpha e^{3x} = e^{3x}$$

$$\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{5} x e^{3x} \rightarrow y = Ae^{3x} + Be^{-2x} + \frac{1}{5} x e^{3x}$$

감사합니다

■ **참고 문헌**

1. 주교재 : 공학수학(제 4판)

: Anthony Croft 등 4명, 한티미디어, 2016. page 605 ~ 636 page