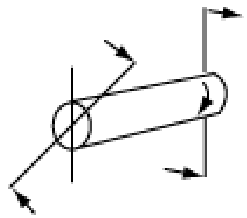
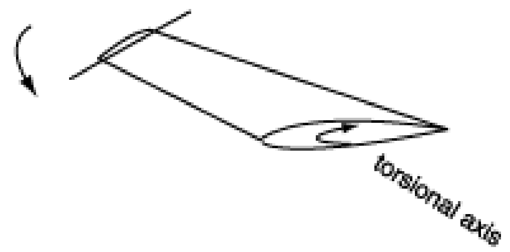
제4장 비틀림(Torsion)

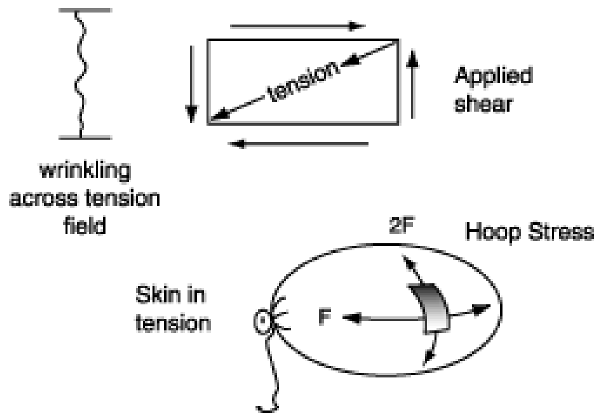
Structural Form:Torsional Member



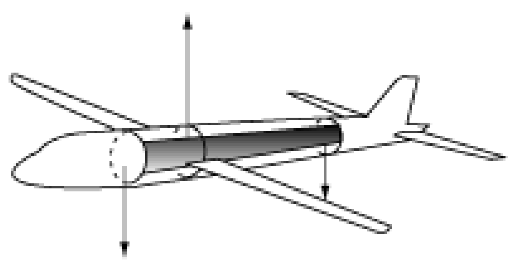
Complementary shear

Application: Thin-walled tube in torsion





Thin-Walled Tubes



Skin in shear
(related to torsion)

4-1 원봉의 비틀림

정의 - 봉의 한 쪽 끝을 고정시키고 다른 쪽 끝을 비틀었을 때 상대적인 비틀림이 생기게 하는 모멘트를 **비틀림모멘트**(twisting moment) 또는 **회전모멘트**(torque)라 한다.

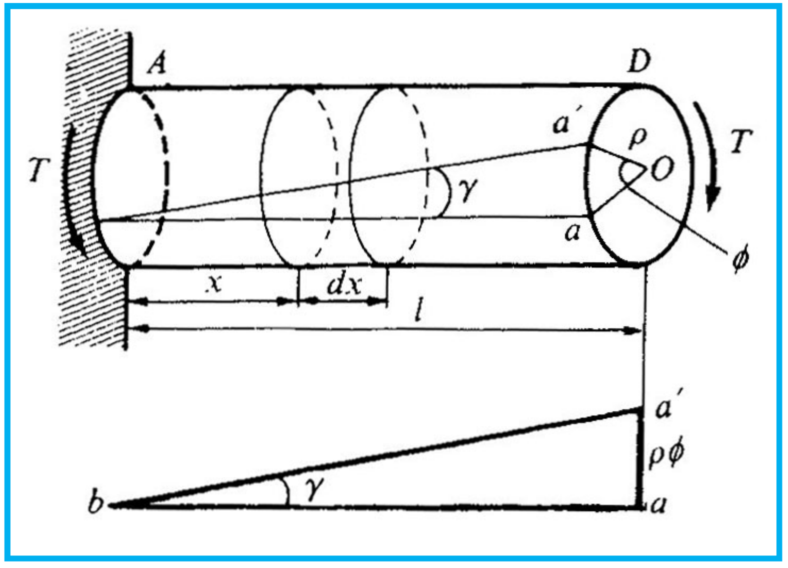


그림 4-1 비틀림과 전단응력 (1)

가정 - 1. 원형단면일 경우 비틀어진 후에도 평면이고 원형단면이다.(단면의 강체적 회전만 존재한다.)

2. 횡단면상의 반지름은 비틀어진 후에도 직선인 채로 있다.

$$\tan\gamma \approx \gamma = \frac{\rho\phi}{l} \qquad (4-1)$$

ϕ : 비틀림각(angle of twist)

4-1 원봉의 비틀림

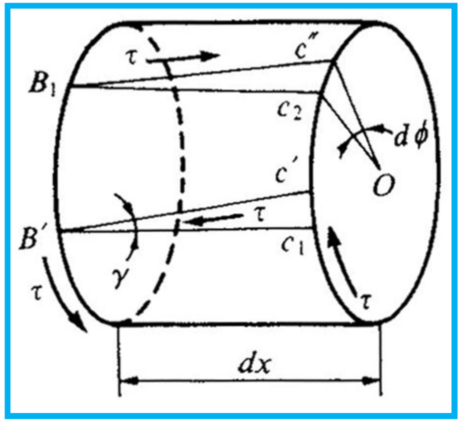


그림 4-1 비틀림과 전단응력 (2)

미소요소 dx 를 생각하면, $\gamma = \dfrac{C_2C''}{B_1C_2}$

$$\left.\begin{aligned} C_2C'' &= \rho d\phi \\ B_1C_2 &= dx \end{aligned}\right\} \quad \text{이므로,} \quad \gamma = \rho \frac{d\phi}{dx} \qquad (4\text{-}2)$$

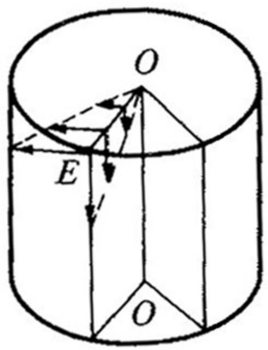
단위길이당의 비틀림각(angle of twist per unit length) : $\theta = \dfrac{d\phi}{dx}$

순수비틀림
(pure torsion)

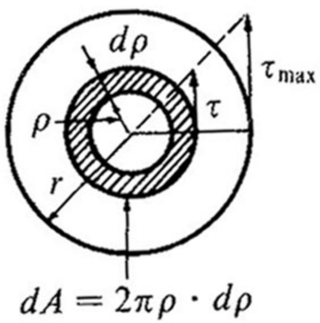
$$\gamma = \frac{\rho d\phi}{dx} = \rho\theta \qquad (4\text{-}3)$$

$$\gamma = \rho\theta = \frac{\rho\phi}{l}$$

4-1 원봉의 비틀림



(a)



(b)

그림 4-2

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta \qquad (4\text{-}5)$$

식 (4-5)와 그림 4-2 (a) 에서 전단변형률 및 전단응력의 최대값은 바깥 표면상에 존재함을 확인할 수 있다.

비틀림모멘트는 그림 (b)의 미소 원환요소에 작용하는 전단력에 반지름을 곱한 것이므로 다음 식이 성립한다.

$$T = \int_0^r (\tau \cdot dA) \cdot \rho = \int_0^r G\rho\theta dA \cdot \rho = G\theta \int_0^r \rho^2 dA = G\theta \cdot I_p \qquad (4\text{-}6)$$

여기서, $$I_p = \int \rho^2 dA \qquad (4\text{-}7)$$

식 (4-7)은 4-7절에서 다시 취급할 것이다.

4-1 원봉의 비틀림

$$\theta = \frac{\phi}{l} = \frac{T}{GI_p} \qquad (4-8)$$

$$\phi = \frac{Tl}{GI_p} \qquad (4-9)$$

$GI_p = \dfrac{T}{\theta}$: 비틀림 강성(torsional rigidity)으로 축 강성 AE 에 대응된다.

식 (4-9)는 후크의 법칙 $\delta = \dfrac{Pl}{AE}$ 에 대응된다.

$$\tau = \frac{T}{I_p} r \qquad \text{단,} \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2} \qquad (4-10)$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} r = \frac{T}{Z_t} = \frac{16}{\pi d^3} T \qquad \text{또는} \qquad T = \frac{\pi d^3}{16} \tau_{\max} \qquad (4-11)$$

단, $Z_t = \dfrac{I_p}{r}$:비틀림의 단면계수 (torsional section modulus)

4-2 마력

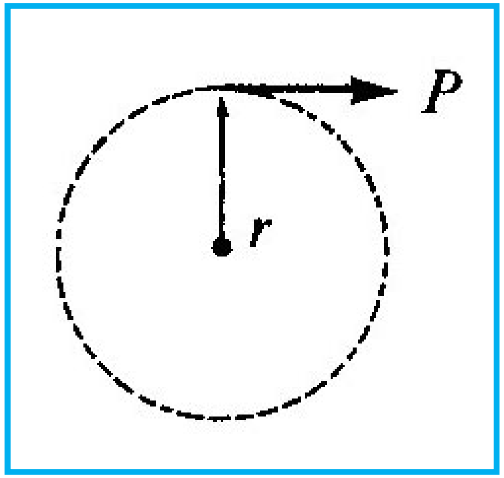


그림4-4

왼쪽 그림에서 회전모멘트를 $T = P \cdot r$ 이라 하면

회전모멘트 T 에 의해서 1초당 행해진 일 W 는 다음과 같다.

$$W = \frac{2\pi T n}{60} \tag{4-14}$$

Watt 단위를 마력(HP, PS)로 변환하면,

$$N = \frac{2\pi T \cdot n}{60 \times 75} \tag{4-15}$$

또는 $$T = \frac{60 \times 75}{2\pi} \cdot \frac{N}{n} = 716.2\frac{N}{n}(kgf \cdot m) = 716{,}200\frac{N}{n}(kgf \cdot mm) \tag{4-16}$$

$$N = \frac{2\pi T \cdot n}{60(550)} = \frac{2\pi T \cdot n}{33{,}000} \quad (n = \text{rpm},\ T = \text{ft-lb},\ N = \text{HP}) \tag{4-17}$$

$$T = \frac{\pi d^3}{16}\tau_{al}\left(\frac{1}{1{,}000}\right) = 716.2\frac{N}{n} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{716.2N}{n} \cdot \frac{16 \times 1{,}000}{\pi \cdot \tau_{al}}} \tag{4-18}$$

[예제 4-1] 지름 60mm의 중실 강봉이 허용전단응력 τ_{al} = 40 MPa와 단위 길이당 허용 비틀림각 θ = 1°/m로 설계되었다. G = 80 GPa로 가정할 때 축이 받을 수 있는 최대허용토크 T를 구하라.

풀이) 허용토크 T1은 식 (4-11)로부터 구한다.

$$T_1 = \pi d^3 \tau_{al} / 16 = \frac{\pi}{16}(0.060\,\mathrm{m})^3\,(40\,\mathrm{MPa}) = \boxed{1{,}700\,\mathrm{N\cdot m}}$$

단위길이당 허용 비틀림각을 토대로 식 (4-8)로부터 허용토크 T_2를 구한다.

$$T_2 = GI_p\theta = (80\,\mathrm{GPa})\left(\frac{\pi}{32}\right)(0.060\,\mathrm{m})^4\left(1\times\frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}\right)\cdot\left(\frac{1}{1.0\,\mathrm{m}}\right) = \boxed{1{,}780\,\mathrm{N\cdot m}}$$

위의 T_1, T_2 중 작은 값이 최대허용토크로 되어, T = 1,700 N·m로 된다.

[예제 4-2] 그림 1과 같이 길이와 외경 r가 같고, 구성재료가 같은 중공축과 중실축이 있다. 중공축의 내경은 0.6r이다. 양축이 같은 비틀림을 받을 경우 이들의 최대전단응력을 비교하라. 또한, 두 축의 중량과 비틀림각을 비교하라.

풀이) T와 r이 같으므로 최대전단응력은 $1/I_p$에 비례한다. 중실축에서는

$$I_p = \pi d^4 / 32 = 0.5\pi r^4$$

또 중공축에서

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} - \frac{\pi}{2}(0.6r)^4 = 0.4352\pi r^4$$

최대전단응력비 = 0.5/0.4352 = 1.15

중실축의 중량 : πr^2

중공축의 중량 : $\pi r^2 - \pi(0.6r)^2 = 0.64\pi r^2$

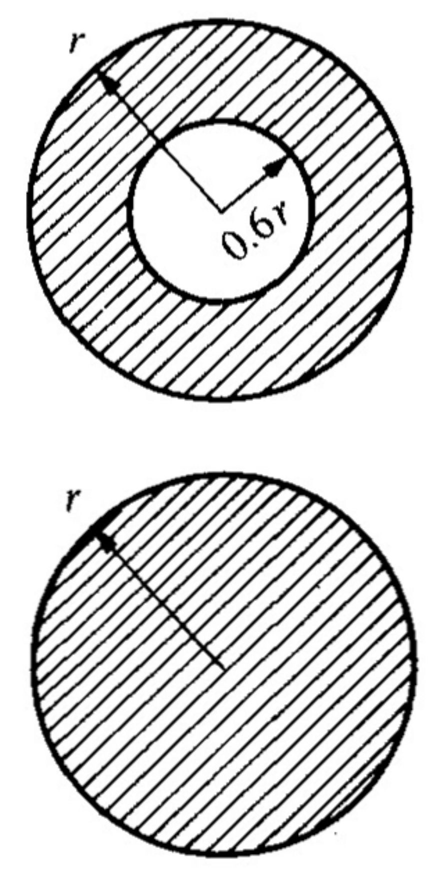


그림 1

이 결과는 중공축 중량의 근본적인 이점을 보여준다.

이 예제에서 중공축응력과 비틀림각은 15% 더 크고 중량은 36% 작다. 이러한 비율은 내축과 외축의 반경비에 의존한다.

[예제 4-4] 그림 2와 같이 양단고정보가 중간단면에 T의 비틀림모멘트를 받을 때 허용전단응력을 τ_{al}이라 하면 안전지름 d는 얼마인가?

풀이) (a)의 전체 FBD을 도시하고 평행방정식 적용하면, $T = T_A + T_B$ (1)

단면 C의 비틀림 각을 ϕ라 하면, $\phi = \dfrac{T_A a}{GI_P} = \dfrac{T_B b}{GI_P}$ (2)

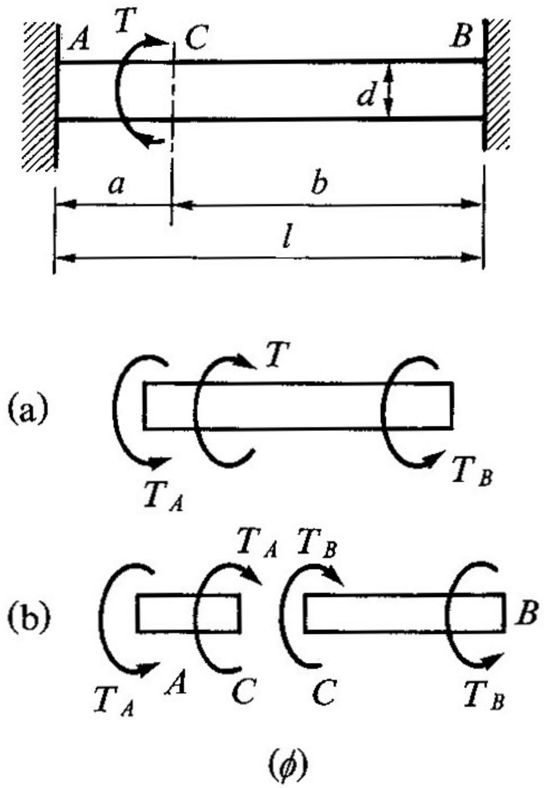


그림 2

(1)과 (2)에서 다음 식을 얻는다.

$$T_A = \frac{b}{l}T, \quad T_B = \frac{a}{l}T \qquad (3)$$

b>a 이면 $T_A > T_B$ 이므로 AC부분에서 d를 구한다.

$$T_A = \frac{\pi d^3}{16}\tau_{al}, \quad d^3 = \frac{16 T_A}{\pi \tau_{al}} = \frac{16}{\pi \tau_{al}} \cdot \frac{b}{l} T$$

$$\therefore d = \sqrt[3]{\frac{16b \cdot T}{\pi l \tau_{al}}}$$

$$\therefore \phi = \frac{T_A \cdot a}{GI_P} = \frac{a}{GI_P} \cdot \frac{b}{l} T = \boxed{\frac{T}{GI_P} \cdot \frac{ab}{l}}$$

4-3 중공원형 단면봉의 비틀림

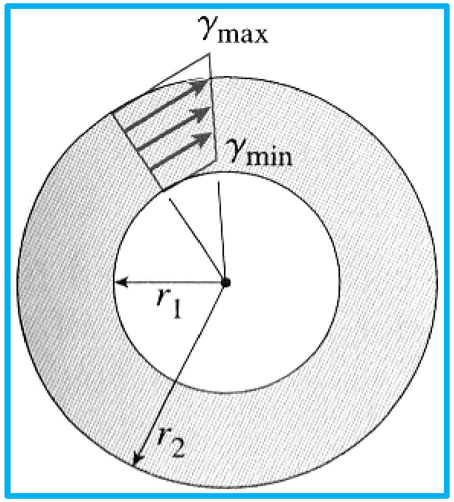


그림 4-5

중공 단면봉은 중실 단면봉보다 비틀림 하중을 저항하는데 유리하다.

중실 단면봉의 경우, 최대전단응력은 바깥표면에 작용하고, 그 중심은 영이다. 그러므로 대부분의 재료에서 허용전단 응력보다 작은 전단응력을 받고 있다.따라서, 중량의 절감이나 재료의 절약을 고려해야 할 경우에는 중공 축을 사용하는 것이 바람직하다.

중공 봉의 경우 중실 봉과 본질적으로 같은 식을 사용하지만

중공 봉의 경우, $I_p = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(d_2^4 - d_1^4\right)$ (4-19)

만일, 중공 봉이 얇다면(즉, 두께 t가 반지름에 비해 작다면),

$$I_p \approx 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4} \quad (4\text{-}20)$$

4-4 비균일 비틀림(선택)

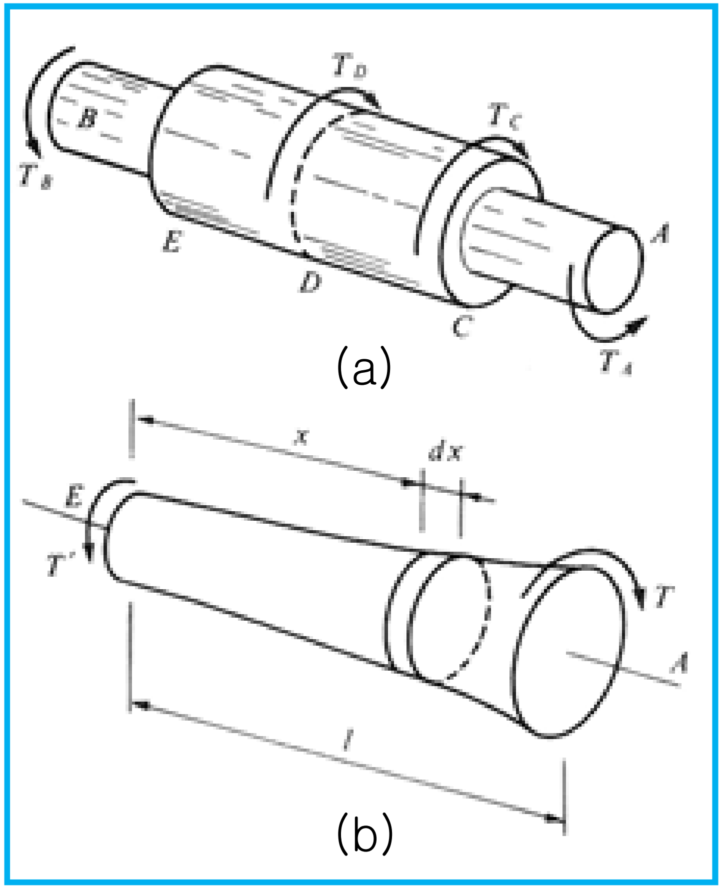


그림 4-6 비균일 단면의 비틀림

불균일 분포비틀림은 순수비틀림과 다르지만 직경이 같은 봉의 각 부분은 순수비틀림을 받고 있다. 따라서 식 (4-9)와 식 (4-11)을 사용하면 다음 식이 얻어진다.

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i l_i}{G_i I_{Pi}} \qquad (4\text{-}21)$$

만약, 단면이 그림 4-6과 같이 연속적으로 변하면 식 (4-21)은 적분형태로 바뀌어야 한다. 즉, 봉의 단면이 선형변화를 가정한다면, 길이가 dx인 한 요소의 비틀림 각은 다음과 같다.

$$d\phi = T_x dx / GI_{Px} \qquad (4\text{-}21)$$

$$\phi = \int_0^l d\phi = \int_0^l \frac{T_x dx}{GI_{Px}} \qquad (4\text{-}22)$$

4-5 임의 단면의 비틀림(선택)

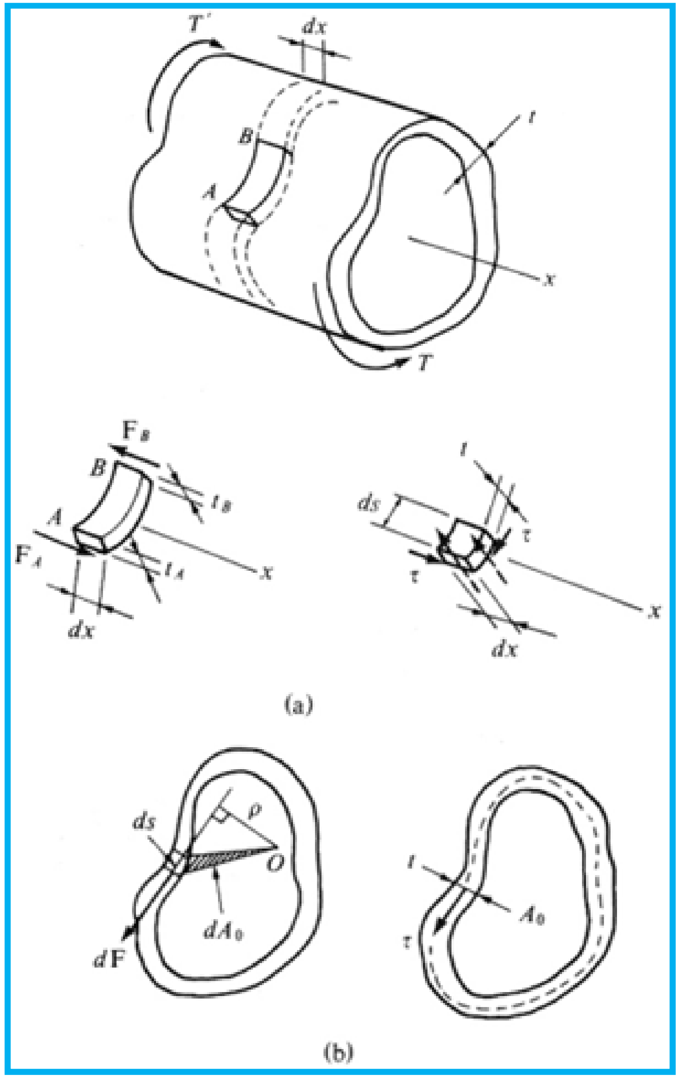


그림 4-7 임의 단면으로 된 관의 비틀림

얇은 두께 관의 비틀림은 전단응력이 두께의 중심선에 접하는 방향으로 균일하다고 가정

그림4-7(a)에서 미소 부분을 생각하여 도시하면 식 (4-23)을 얻을 수 있다.

$$F_A = \tau_A (t_A dx),\ F_B = \tau_B (t_B dx)$$

$$\therefore \tau_A t_A = \tau_B t_B \qquad (4\text{-}23)$$

$$f = \tau \cdot t = \text{constant} \qquad (4\text{-}24)$$

그림4-7(b)에서 요소면적은 *tds*, 전단력 *dF*와 임의점 *O* 에서의 모멘트 dM_0이며 식4-25와 같다.

$$\therefore T = \oint dM_0 = \oint f(2dA_0) \qquad (4\text{-}25)$$

[예제 4-5] 그림3의 형상인 60X100(mm)의 직각단면을 가지는 알미늄관 구조물이 압출 제조된다. 4mm의 균일 벽두께 그림 3(a),(b), 제조결함으로 인하여 벽 *AB*와 *AC*는 3mm두께이고, 벽 *BD*와 *CD*는 5mm인 경우 그림3(b)에 대하여 3kN·m의 비틀림모멘트가 작용하는 관의 네 개의 벽에 발생하는 전단응력을 계산하라.

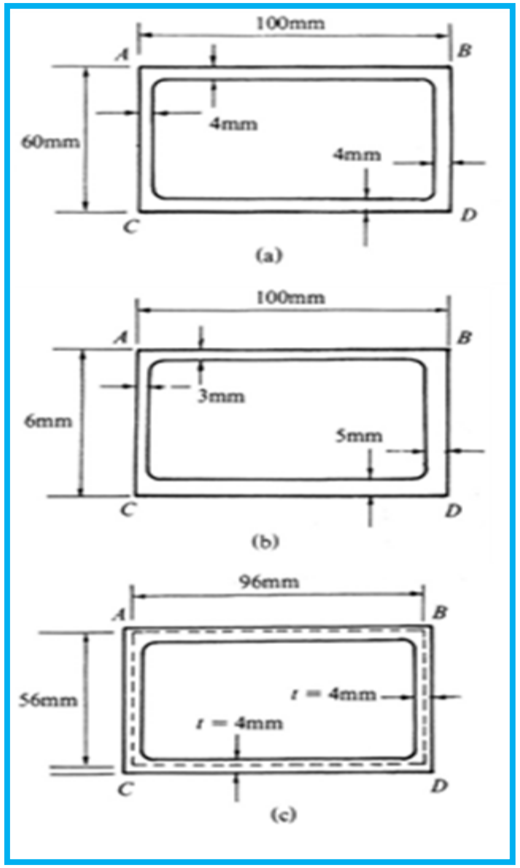


그림 3

풀이) 그림 3(a)의 면적 *A*는 그림 3(c)에서 구한다.

$$A = (96\text{mm})(56\text{mm}) = 5.267 \times 10^{-3}\text{m}^2$$

네 벽의 두께가 4mm이므로 전단응력을 구하면 아래와 같다.

$$\therefore \tau = \frac{T}{2tA} = \frac{3 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}}{2(4 \times 10^{-3}\text{m})(5.367 \times 10^{-3}\text{m}^2)} = \boxed{69.8\text{MPa}}$$

t=3mm와 *t*=5mm의 계산결과는 다음과 같다.

$$\therefore \begin{aligned} \tau_{AB} = \tau_{AC} &= \frac{3 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}}{2(3 \times 10^{-3}\text{m})(5.367 \times 10^{-3}\text{m}^2)} = \boxed{93.0\text{MPa}} \\ \tau_{BD} = \tau_{CD} &= \frac{3 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}}{2(5 \times 10^{-3}\text{m})(5.367 \times 10^{-3}\text{m}^2)} = \boxed{55.8\text{MPa}} \end{aligned}$$

두께가 불균일 할 경우 얇은 쪽에서 큰 응력이 생긴다.