2-5 허용응력

➢ 허용응력(allowable stress)

: 탄성한계 내에서 각 부재에 실제로 생겨도 무방한 또는 의도적으로 고려해 주는 응력. 또는 사용응력(working stress) 이라 칭함.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{al} &= \frac{\sigma_{yp}}{n} (a) \\ \sigma_{al} &= \frac{\sigma_u}{n} (b) \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}14)$$

(σ_{yp} : 항복점 σ_u : 최후강도 n : 안전계수)

연성재료에서는 식(a), 취성재료에서는 식 (b)를 사용

[예제2-3]

세 가지의 다른 재료 A, B, C에 대해 직경 0.505in, 표점길이 2.0in인 표준시험편을 가지고 인장시험을 하였다. 시험편이 파단된 후의 표점길이가 각각 2.13, 2.48, 2.78in 이었고, 직경이 0.484, 0.398, 0.253in이었다. 각 시험편에 대한 연신률과 단면감소율의 백분율을 구하고, 취성 혹은 연성인가를 구분하여라.

풀이

식 (2-12), 식 (2-13)에서 구할 수 있다.

재료 A :

$$\text{신장률} = \frac{2.13 - 2.00}{2.00} \times 100 = 6.5\%$$

$$\text{단면감소율} = \frac{(0.505)^2 - (0.484)^2}{(0.505)^2} \times 100 = 8.1\% \quad \therefore \text{취성}$$

재료 B :

$$\text{신장률} = 24\%$$

$$\text{단면감소율} = 38\% \quad \therefore \text{연성}$$

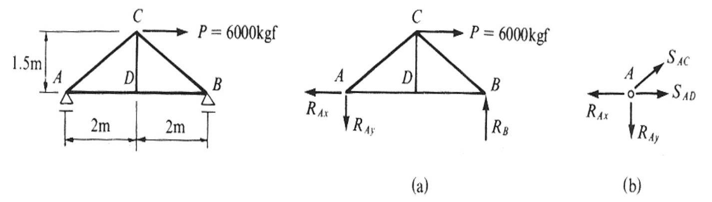
재료 C :

$$\text{신장률} = 39\%$$

$$\text{단면감소율} = 75\% \quad \therefore \text{연성}$$

[예제2-4]

[그림 2]의 트러스에서 강재의 항복점이 4,000kgf/cm^2, 인장을 받는 부재의 안전계수 2라면 부재 AC, AD의 단면적을 얼마로 할 것인가? (단, 압축부재의 좌굴은 무시한다.)



[그림 2]

풀이

[그림(a)]와 같이 전체 FBD를 그리고, 평형방정식을 적용시켜 반력을 구한다.

$$\begin{cases} \Sigma P_y = 0 : -R_{Ay} + R_B = 0, \; R_B = R_{Ay} \\ \Sigma P_x = 0 : R_{Ax} - P = 0, \; R_{Ax} = P = 6{,}000\text{kgf} \\ \Sigma M_A = 0 : R_B \times 4 - P \times 1.5 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} R_B = \frac{1.5}{4} P = 2{,}250(\text{kgf}) \\ R_{Ay} = 2{,}250(\text{kgf}) \end{cases}$$

[그림(b)]에서 AC, AD부재의 축력을 S_{AC}, S_{AD}라 하고, 점 A의 FBD를 나타내고 점 A에서 평형방정식을 적용시킨다.

$$\Sigma P_y = 0 : R_{Ay} - S_{AC}\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = R_{Ay} - S_{AC} \times \frac{3}{5} = 0$$

$$\therefore S_{AC} = 3{,}750\text{kgf}(\text{인장})$$

$$\Sigma P_x = 0 : R_{Ax} - S_{AC}\frac{4}{5} - S_{AD} = 0$$

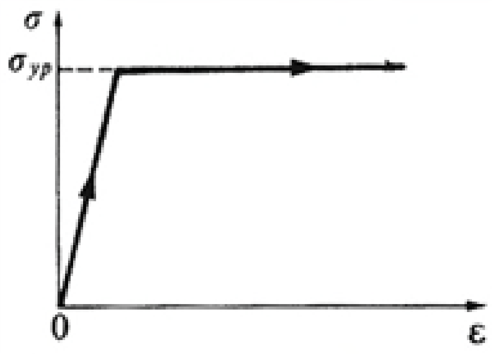
$$\therefore S_{AD} = 3{,}000\text{kgf}(\text{인장})$$

$$\therefore \begin{cases} \text{부재 } AC \text{ 의 단면적 } A_{AC} = \frac{S_{AC}}{\sigma_{al}} = \frac{3{,}750}{4{,}000/2} = 1.9\text{cm}^2 \\ \text{부재 } AD \text{ 의 단면적 } A_{AD} = \frac{S_{AD}}{\sigma_{al}} = \frac{3{,}000}{2{,}000} = 1.5\text{cm}^2 \end{cases}$$

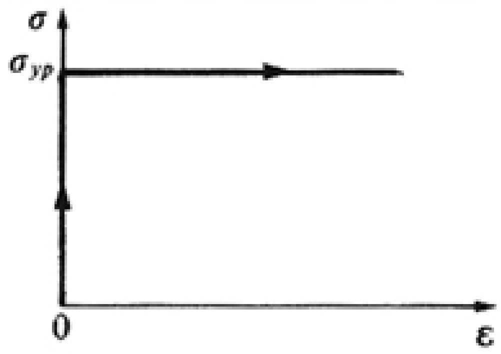
2-6 σ-ε 선도의 이상화와 극한설계

➢ 가공경화(work hardening)를 무시한 이상화

: 항복점 이후에는 가공경화 현상이 존재하는데 이러한 성질을 무시하여 탄성역과 소성역의 두 영역으로 가정하면 [그림 2-9]와 같이 된다.



[그림 2-9] 이상화의 예

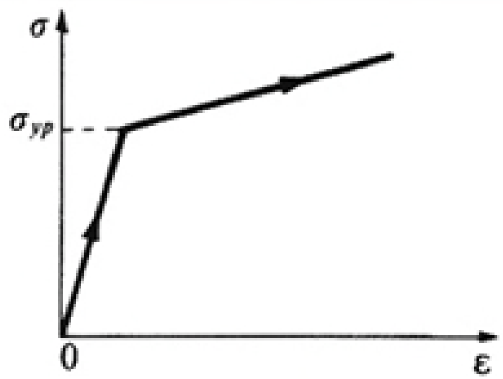


[그림 2-10]

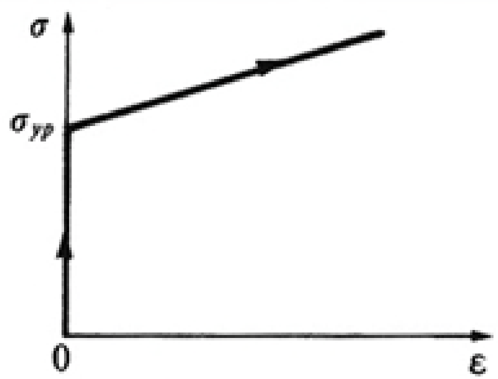
구조물의 재료로 널리 사용되는 연강과 구조용강은 인장시험하면 큰 소성변형이 생기는데 [그림 2-9]와 같이 이상화하여 극한설계(limit design)에 이용하게 된다.
또한 [그림 2-10]의 강완전소성체(rigid-perfectly plastic body, 剛完全塑性體)는 탄성변형률이 소성변형률에 비하여 대단히 작아서 탄성변형률을 무시한 것이다.

➢ 선형적인 가공경화를 인정하는 이상화

재료에 따라서는 가공경화를 완전히 무시할 수가 없어서 항복점 이후에는 소성변형이 선형적인 경화특성을 지닌 것으로 가정하는 경우이다.
[그림 2-11]과 같이 항복점 이하에서 탄성체이면 탄선형경화소성체 (elastic-plastic body, linear strain hardening, 彈線形硬化塑性體)이고 항복점 이하가 강체(剛體)이면 [그림 2-12]와 같은 강선형경화소성체(rigid-plastic body, linear strain hardening)로 된다.



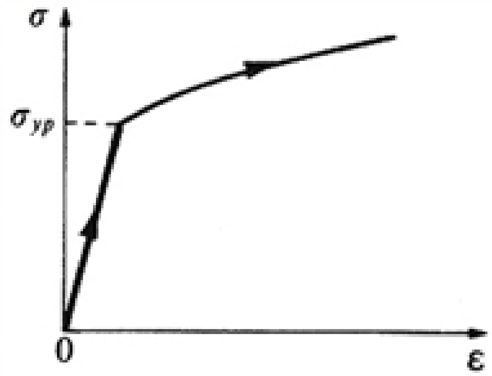
[그림 2-11]



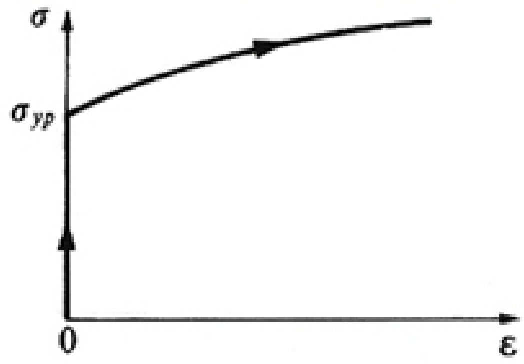
[그림 2-12]

➢ 비선형가공경화를 인정하는 이상화

변형률경화 $\sigma = k\varepsilon_{y}^{n}$ (2-15)



[그림 2-13]

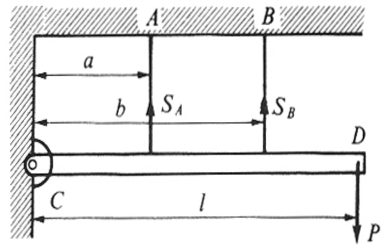


[그림 2-14]

[그림 2-13]; 탄비선형 경화소성체(elastic-plastic body, non-linear strain hardening),

[그림 2-14]; 강비선형 경화소성체(rigid-plastic body, non-linear strain hardening).

[예제2-5]
[그림 3]과 같이 한 끝 C에서 힌지로 저지된 길이 ℓ 인 강체봉 CD를 두 개의 서로 다른 연직강선에 의하여 수평하게 된다. 이 봉의 다른 끝 D에 수직하중 P가 작용할 때 이 두 강선에 생기는 인장력 S_A와 S_B를 구하라. 또, 극한설계에 의하여 극한하중을 구하라.



[그림 3]

풀이

힌지 C에 대한 봉 CD의 모멘트를 생각한다. 봉 CD의 자중을 무시하면 식 (a)로 된다.

$$S_A a + S_B b = Pl \tag{a}$$

식 (a)는 미지수가 2개이지만 이 구조물은 다른 평형방정식을 적용할 수 없으므로 부정정문제이다. 따라서 구조물이 탄성변형을 하는 것으로 가정하여 기하학적인 비례관계에서 구하면 식 (b)로 된다.

$$\frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{a}{b} \tag{b}$$

후크 법칙을 적용;

$$\therefore S_A = \frac{Pal}{a^2+b^2},\ S_B = \frac{Pbl}{a^2+b^2}$$

$S_B : S_A = b : a$ 비율로 <u>S_B쪽이 큰 힘을 받고 있다.</u>

P를 점차 증가시키면 강선 B쪽은 먼저 항복점

강선 A쪽은 아직 항복점 이하의 응력상태

하중을 더욱 증가시키면 <u>강선 A쪽도 항복점에 도달하게 된다.</u>

<u>이때의 하중을 이 구조물의 극한하중 P_L</u>

<u>실제로 작용할 하중의 안전계수 n배만큼 더 큰 하중을 받도록 구조물을 설계하는 기법이 극한설계이다.</u>

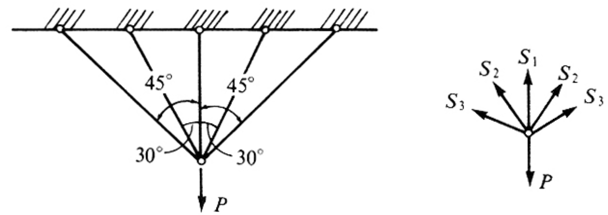
재료가 소성역에 도달하게 되면 극한설계에서는 [그림]와 같이 응력의 크기와 변형과는 무관하게 되므로 힘의 평형관계만 고려하는 정정문제로 변하게 된다.

$$S_A = S_B = \sigma_{\text{항복}} \cdot A$$

$$P_L l = \sigma_{\text{항복}} \cdot Aa + \sigma_{\text{항복}} \cdot Ab$$

$$\therefore P_L = \frac{\sigma_{\text{항복}} A(a+b)}{l} \qquad \text{(c)}$$

[예제2-6]
좌우대칭인 [그림 4]의 구조물에서 단면적 $A=10\mathrm{mm}^2$, $\sigma_{yp}=30\mathrm{kgf/mm}^2$으로 모두 같을 때 극한하중 P_L을 구하라



[그림 4]

풀이

집합점의 힘의 평형에서(좌우대칭이므로 중앙봉의 축력 S_1, 30°봉의 축력을 S_2, 45°봉의 축력을 S_3라 하자.)

$$\sum P_y = 0 : S_1 + 2S_2\cos 30° + 2S_3\cos 45° = P$$

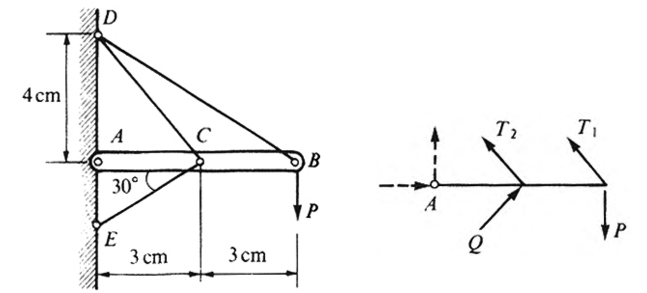
P가 점점 커져서, 결국 전 부재가 σ_{yp}를 받게 될 때 이 구조물은 붕괴된다. 즉,

$$S_1 + \sqrt{3}\,S_2 + \sqrt{2}\,S_3 = P$$

$$\sigma_{yp} \cdot A(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}) = P_L$$

$$\therefore P_L = 1{,}244(\mathrm{kgf})$$

[예제2-7]
[그림 5]와 같이 줄 BC와 CD의 단면적은 $10mm^2$, σ_{yp} =40kgf/mm^2일 때 부재 CE가 좌굴하중 Q=3,000kgf의 압축을 받을 수 있는 극한하중 P_L을 구하라. 단, 보 AB는 강체이며, 길이 CD=5cm, DB=7.2cm이다.



[그림 5]

풀이

$$\sum M_A = 0 : P \times 6 - \left(T_1 \times \frac{4}{7.2}\right) \times 6 - \left(T_2 \times \frac{4}{5}\right) \times 3 - \left(Q \times \frac{1}{2}\right) \times 3 = 0$$

$$P = T_1 \times \frac{4}{7.2} + T_2 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + Q \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P_L = \sigma_{yp} A \left(\frac{4}{7.2} + \frac{2}{5}\right) + 3,000 \times \frac{1}{4} = 1,132.2(\mathrm{kgf})$$

제 3 장 전단

학습목표

본 장에서는 절단기로 물체를 절단할 때와 같이 접선방향으로 작용하는 전단응력(Shearing stress)에 대해 알아보고 이때 일어나는 열 응력과 크리프(creep)를 알고 힘의 평형과 부정정 문제를 풀어본다.

3-1 전단응력과 전단변형률

➢ 전단응력(shearing stress, τ)

: 수평으로 전단하려는 전단력(shearing stress) P가 작용하여
리벳의 단면 ab에 발생하는 응력

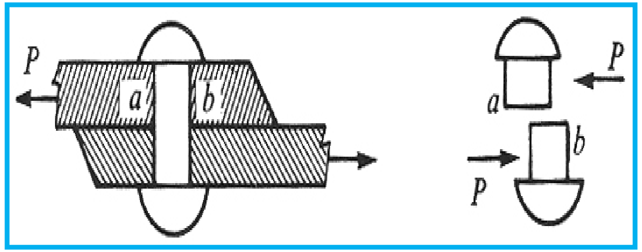


그림3-1 리벳의 전단

$$\tau = \frac{P}{A}(kgf/cm^2, N/m^2) \qquad (3\text{-}1)$$

▪ 단순전단(simple shear)

: 전단응력이 리벳을 직접 절단시키도록 된 경우

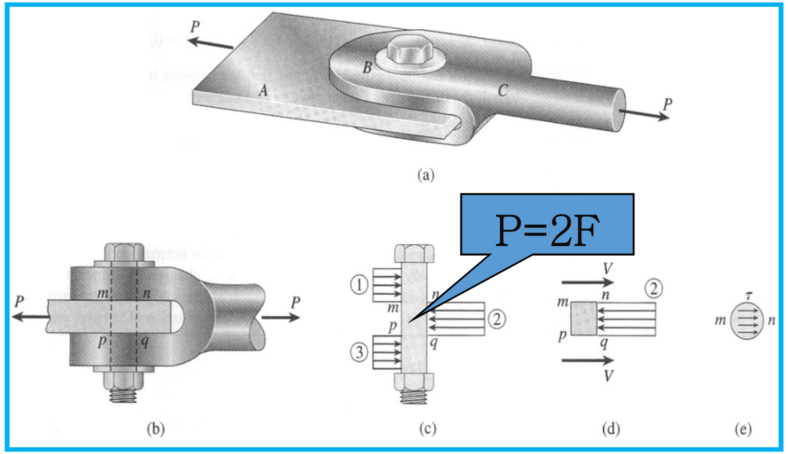


그림 3-2 U형 링크된 볼트의 이중전단 상태

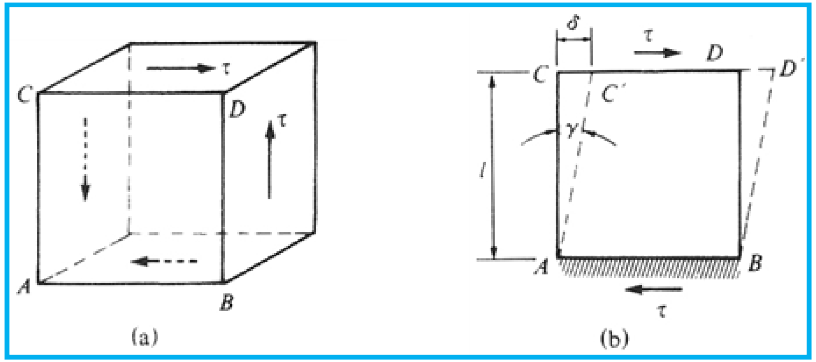


그림 3-3 리벳의 전단면의 확대

- 이중전단(double shear)

: 전단은 평면 A를 아래위로 감싸는 평면 B에서 일어난다. 이 경우 리벳 B는 이중전단상태이다.

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{P}{2A} \qquad (3\text{-}2)$$

- 순수전단(pure shear)상태

: 오직 전단응력의 영향을 받는상태. 전단응력에 의해 그림(a)의 정사각형은 그림(b)와 같이 마름모꼴로 변형된다. 이때, 상대적 변형량 δ는 다음 식과 같다.

$$\delta = l\tan\gamma \simeq l\gamma$$

➢ 전단변형률(shearing strain, γ)

: 전단을 받을 때도 인장(압축)때와 같이 후크 법칙이 성립하며,
식(3-3)로 표현된다. γ는 단위길이에 대한 변화량(미끄럼량)
이므로 변화율이 된다.

$$\tau = G \cdot \gamma \qquad (3\text{-}3)$$

➢ 전단탄성계수 (shear modulus, G)

: **횡탄성계수** 또는 **강성율**(modulus of rigidity)이라 하며,
재료의 탄성적 성질을 나타내는 중요한 정수.

Ex) 구조용강의 탄성계수

$$G = 0.81 \times 10^4 \, kgf \,/\, mm^2 \qquad \text{(미터계단위)}$$

$$G = 0.81 \times 10^{10} \times 9.8 N / m^2 = 0.79 \times 10^{11} N / m^2 = 79 GPa \qquad \text{(SI단위)}$$

일반적으로, 재료의 요소에 작용하는 전단응력은 서로 직각을 이루는 면에서 그 크기가 같고 방향이 반대인 쪽으로 발생한다. 그림 3-4 에서 τ_1의 작용면에 수직인 면(BCGF)(ADHE)에도 τ_2가 존재하여 $\tau_2 dy \cdot dz$의 전단력이 생기고 , 이는 $[(\tau_2 \cdot dy \cdot dz) \cdot dx]$의 짝힘이 되어 식(3-4)처럼 서로 평형을 유지해야 한다.

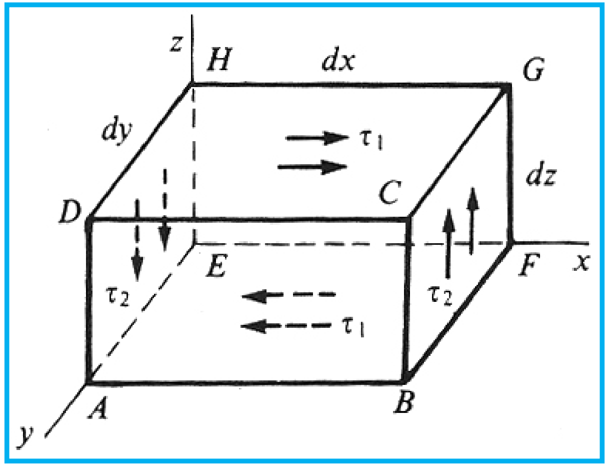


그림 3-4 짝힘으로 작용하는 전단응력

$$(\tau_1 dxdy) \cdot dz = (\tau_2 dydz) \cdot dx \qquad (3\text{-}4)$$

$$\therefore \tau_1 = \tau_2$$

즉, 한 면에 τ가 있으면 이와 직각인 면에는 반드시 크기가 같고 작용방향이 반대인 τ가 존재한다.

[예제 3-1] 펀치를 사용해서, 두께 4mm의 연강판(軟鋼板)에 지름 15mm의 구멍을 내고 싶다. 필요한 하중 P 및 펀치에 작용하는 평균압축응력 σ를 구하라. 단, 연강의 전단강도 τ = 220MPa이다.

풀이 *판의 두께 t, 원공의 지름 d라면 하중 P는 다음 식으로 된다.*

$$P = \pi d \cdot t \cdot \tau$$

SI 단위로 고쳐 쓰면

$$\tau = 220\,\mathrm{MPa} = 220 \times 10^{6}\,\mathrm{N/m^{2}}$$

$$t = 4\,\mathrm{mm} = 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m},$$

$$d = 15\,\mathrm{mm} = 15 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

윗 식에 대입하면 하중 P는 다음과 같이 된다.

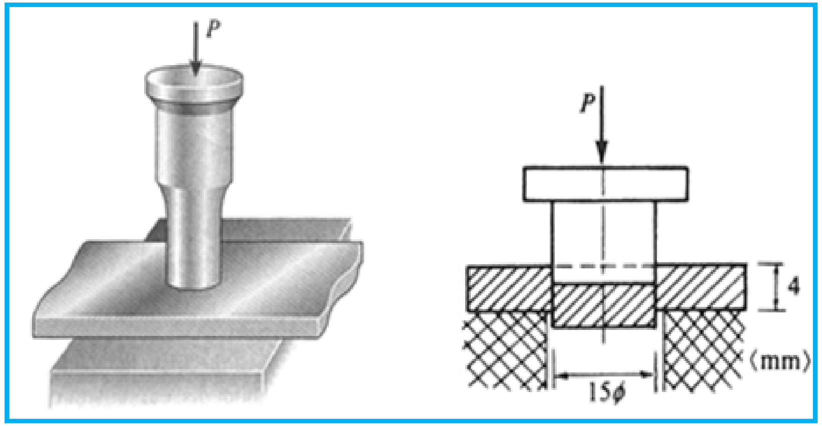


그림 1

$$P = 3.14 \times 15 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \times 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \times 220 \times 10^{6}\,\mathrm{N/m^2}$$

$$= 4.15 \times 10^{4}\,\mathrm{N} = 41.5\,\mathrm{kN}$$

평균압축응력 σ는 다음과 같다.

$$\sigma = \frac{P}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{4.15 \times 10^{4}\,\mathrm{N}}{3.14 \times \left(\frac{15}{2}\right)^2 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2}}$$

$$= 0.0235 \times 10^{10}\,\mathrm{N/m^2} = 235 \times 10^{6}\,\mathrm{Pa} = \boxed{235\,\mathrm{MPa}}$$

[예제 3-2] 그림 2처럼 네 개의 볼트에 의해 플렌지 이음을 한 두 개의 축에 비틀림 모멘트 To = 10kN·m가 전달되고 있다. 볼트 중심거리d=150mm이면, 볼트(d_b = 20mm)에 걸리는 평균전단응력 τ는 얼마인가?

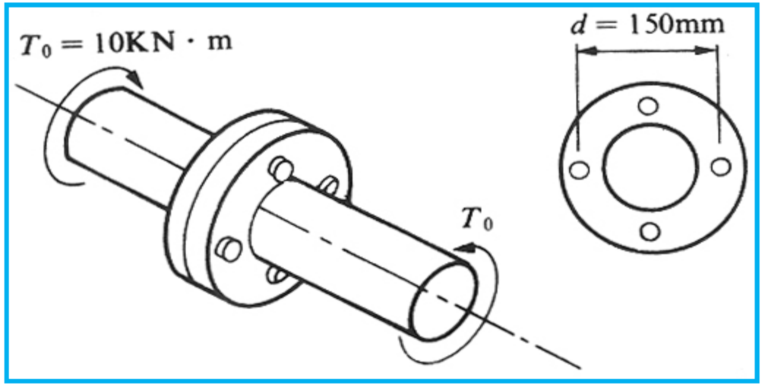
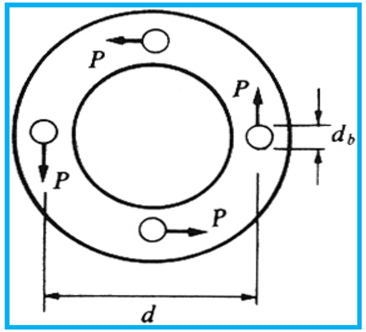


그림 2



FBD

풀이 *볼트 한 개에 걸리는 힘을 P, 볼트의 단면적을 A라 하면*

$$T_0 = P \cdot \frac{d}{2} \text{ (볼트 한 개에 대한 것)} \quad T_0 = \frac{p \cdot d}{2} \times 4 \text{ (볼트 네 개에 대한 것)} \quad A = \frac{\pi d_b^2}{4}$$

$$\therefore \tau = \frac{P}{A} = \frac{\frac{T_0}{2d}}{\frac{\pi d_b^2}{4}} = \frac{2T_0}{\pi d d_b^2} = \frac{2(10kN \cdot m)}{\pi(150mm)(20mm)^2} = \boxed{106MPa}$$