5-5 굽힘응력

두 개의 동일한 크기의 집중하중 P가

작용하는 1-2구간

⬇

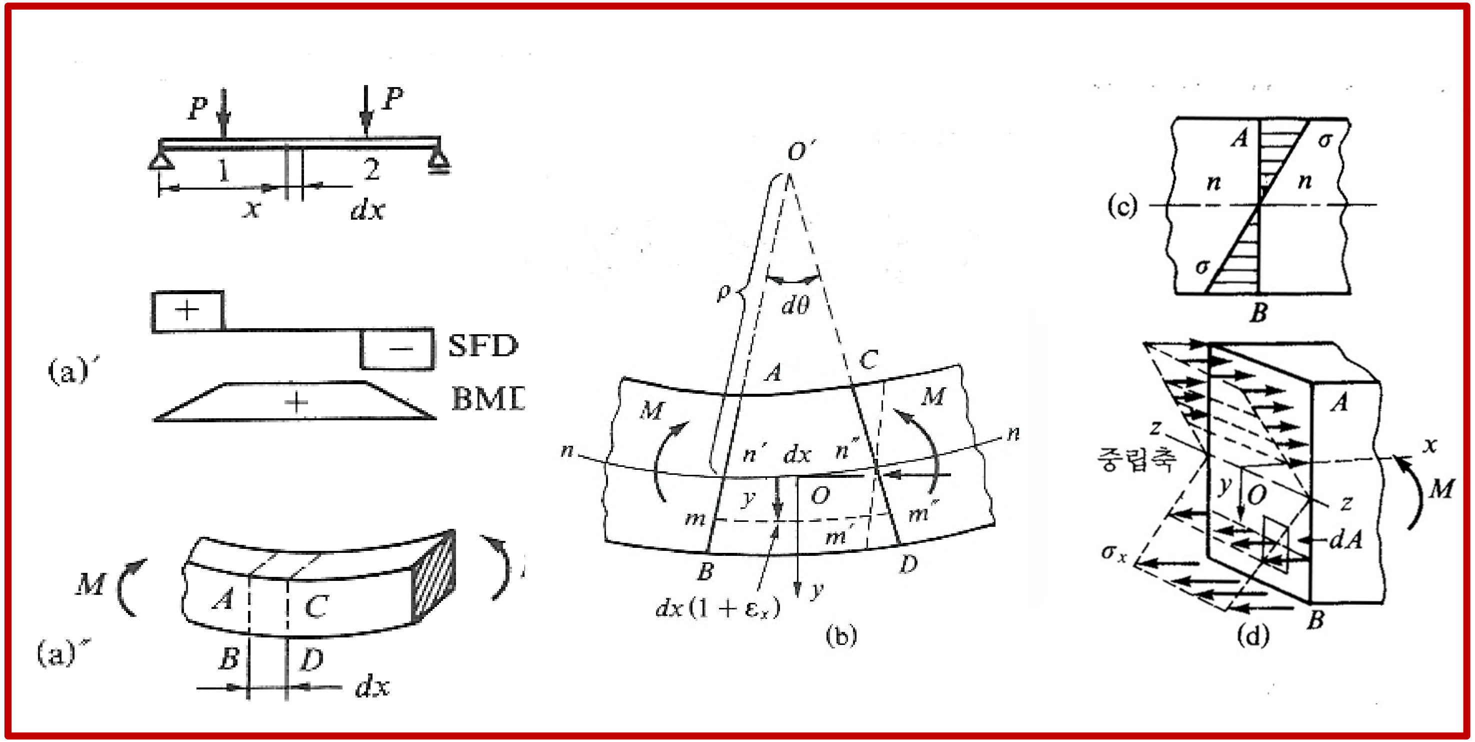
전단력이 존재하지 않고 균일한

굽힘모멘트만 존재함

◈ 순수굽힘(Pure bending)

: 같은 크기의 굽힘모멘트만이 작용하고

전단력이 없는 경우



[그림 5-11(a)] 굽힘응력(사각형 단면의 예)

▷보내에서의 굽힘응력의 해 ◁

⇒ 순수굽힘하에 다음과 같은 가정을 두어 해를 구함

(1) 균일단면의 곧은 보의 문제만 취급한다.

(2) 정하중을 받는 경우만 생각한다.

(3) 보의 단면은 하중면에 대해서 대칭이다.

(4) 보의 재료는 균질이다.

(5) 탄성한계 이하에서 취급한다.

(6) 인장이나 압축의 탄성계수는 동일하다.

(7) 변형은 작아서 항상 원래의 치수를 그냥 사용한다.

(8) 굽히기 전의 보의 횡단면은 굽히고 난 후에도 평면이다.

1-2구간에서 d_x의 미소부분의 평형관계를 생각.

이 때 보는 아래가 인장, 위는 압축이 되며 그 중간에 nn축은 인장도 압축도 아닌 길이의 변화가 없는 곳이 있게 되는데 이면을 중립면이라 한다.

이 중립면(中立面)상의 한 점을 원점 O로 하는 좌표축을 생각한다.

굽히고 난 후의 AB, DC단면은 n-n과는 수직이고 평면인 채로 약간 경사지게 됨

mm′-m´m´´만큼 늘어나고 처음 길이는 d_x이므로

$m'm''/dx = \varepsilon_x$

$$\varepsilon_x = \frac{\widehat{m'm''}}{\widehat{n'n''}} = \frac{y \cdot d\theta}{dx} = \frac{y \cdot d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma = E\varepsilon_x = E\frac{y}{\rho} \qquad (5-1)$$

미지수 ρ가 있어 σ_x 의 성질은 알 수 있어도크기는 알 수 없음

$$\Sigma P_x = 0 : \int_A \sigma_x \cdot dA = 0, \int E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int y dA = 0$$

$$\therefore \int y dA = 0 \qquad (5\text{-}2)$$

⇒ 이 식은 Z축에 관한 면적모멘트가 0이므로

Z축은 도심을 지나는 축이 된다.

$$\Sigma M_{z-z} = 0 : \int_A (\sigma_x \cdot dA) \cdot y = M \qquad (5\text{-}3)$$

$$\int_A \frac{y}{\rho} E \cdot dA \cdot y = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = M \qquad (5\text{-}4)$$

$$\int_A y^2 dA = I_z \qquad (5\text{-}5)$$

관성모멘트(moment of inertia)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \quad \text{(Bernoulli-Euler 의 법칙)} \qquad (5\text{-}6)$$

굽힘강성(flexual rigidity)

⊙ 굽힘강성 : 단위의 곡률변화를 주는데 필요한 굽힘모멘트

(GI_p : 비틀림 강성, AE : 축 강성에 대응하는 식임)

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} y \qquad (5\text{-}7)$$

여기서 I_z는 단면 2차 모멘트(second moment of area) 또는

단면의 관성모멘트(moment of inertia)라 한다.

(첨자 z는 z축에 의한 관성모멘트라는 뜻)

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I_z} c_1, \quad \sigma_{min} = \frac{M}{I_z}(-c_2) \tag{5-8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{max} = \frac{M}{Z_1}, \quad \sigma_{min} = -\frac{M}{Z_2} \\ &\text{단,} \quad Z_1 = \frac{I_z}{c_1}, \quad Z_2 = \frac{I_z}{c_2} \end{aligned}\right\} \tag{5-9}$$

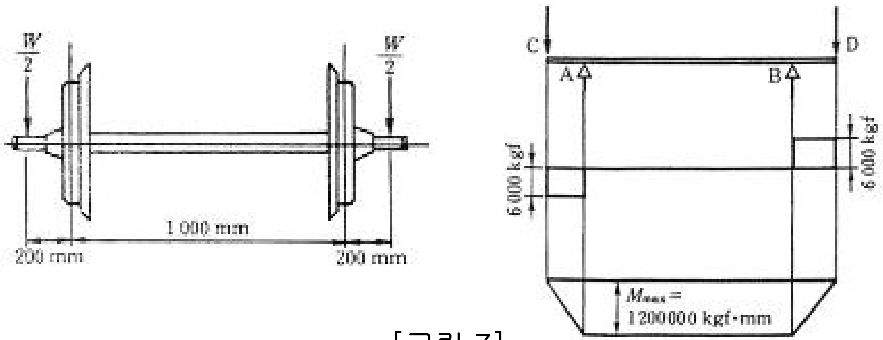
Z_1, Z_2 : 단면계수(section modulus)

c_1, c_2 : 중립축과 인장, 압축측 단면 끝까지의 거리

$\sigma_{max} \rightarrow \sigma_{al}$

$$Z = \frac{M_{max}}{\sigma_{al}} \tag{5-10}$$

[예제 5-7] [그림 7]과 같은 차축이 12톤(W)의 하중을 받을 때 허용굽힘응력 σ_B=4.7kgf/mm^{2}으로 하여 축의 직경을 구하라.



[그림 7]

❖풀이

$$R_A \times 1{,}000 - 6{,}000 \times (1{,}000 + 200) + 6{,}000 \times 200 = 0$$

$$R_A = \frac{6{,}000 \times 1{,}200 - 6{,}000 \times 200}{1{,}000} = 6{,}000(\mathrm{kgf})$$

$$R_A + R_B - 6{,}000 - 6{,}000 = 0$$

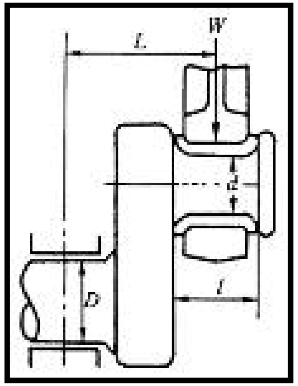
$$R_B = 6{,}000(\mathrm{kgf})$$

$$M_{\max} = M_{A\sim B} = -6{,}000 \times 200 = -1{,}200{,}000(\mathrm{kgf \cdot mm})$$

$$M_{\max} = \sigma_b Z = \frac{\pi d^3}{32}\sigma_b$$

$$\therefore\ d = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi\sigma_b}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 1200000}{\pi \times 4.7}} \fallingdotseq 137.5(\mathrm{mm})$$

[예제 5-8] [그림 8]과 같은 외팔형 크랭크축에서 핀(pin)에 W=1,800kgf의 수직하중이 걸릴 때 크랭크 핀의 직경 d와 길이 l 을 구하라. 단 l/d=1.5이고 허용굽힘응력 σ_b=6kgf/mm^{2}이다.



[그림 8]

❖풀이

$$M_{max} = \frac{1}{2} Wl = \frac{1}{2} W\left(\frac{l}{d}\right) \times d$$

$$M_{max} = \sigma_b Z, \quad Z = \frac{\pi}{32} d^3$$

$$= \frac{\pi}{32} d^3 \times \sigma_b$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} W\left(\frac{l}{d}\right) d = \frac{\pi}{32} d^3 \sigma_b$$

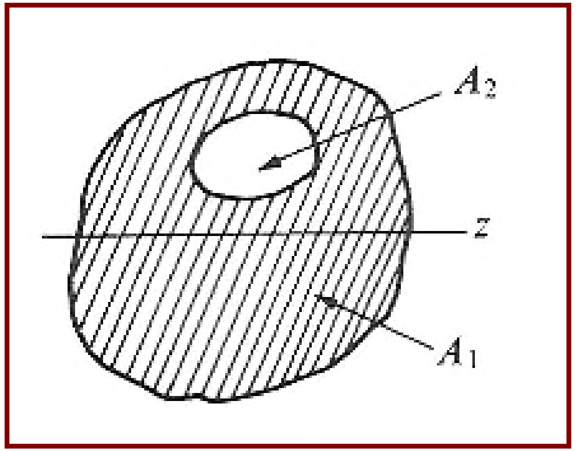
$$d = \sqrt{\frac{16\,W\left(\frac{l}{d}\right)}{\pi \sigma_b}}$$

$W = 1{,}800kgf$, $l/d = 1.5$, $\sigma_b = 6\mathrm{kgf/mm^2}$ 이므로

$$\therefore \begin{cases} d = \sqrt{\dfrac{16 \times 1{,}800 \times 1.5}{\pi \times 6}} \fallingdotseq 48\mathrm{mm} \\ \mathrm{l} = 1.5\mathrm{d} = 1.5 \times 48 = 72(\mathrm{mm}) \end{cases}$$

5-6 단면의 관성모멘트

$I_z = \int y^2 dA$ 는 중립축 z에 관한 관성모멘트. r=√I/A라고 놓고 이 때 r은 관성반지름(radius of gyration) 또는 단면 2차반지름. $(r_z = \sqrt{I_z/A},\ r_y = \sqrt{I_y/A})$



[그림 5-12] 면적을 분할시킬 때

단면적 $A=A_1+A_2+\cdots$로 분할할 때

$$I_z = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \cdots \qquad \text{(a)}$$

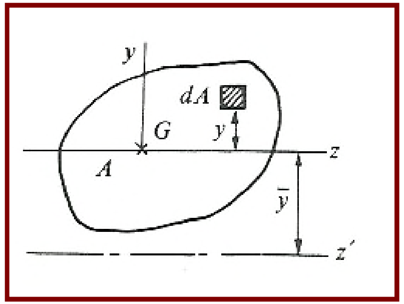
$A=A_1-A_2$일 때

$$I_z = \int_{A_1} y^2 dA - \int_{A_2} y^2 dA \qquad \text{(b)}$$

정리 I

평행축의 정리(parallel-axis theorem)

: 관성모멘트가 그림처럼 도심(centroid)축을 지나지 않는 경우에 사용



[그림 5-13] z에 평행축 z′

$$I_{z'} = \int_A (y+\bar{y})^2 dA = \int_A y^2 dA + 2\bar{y}\int_A y\,dA + \bar{y}^2 \int_A dA$$

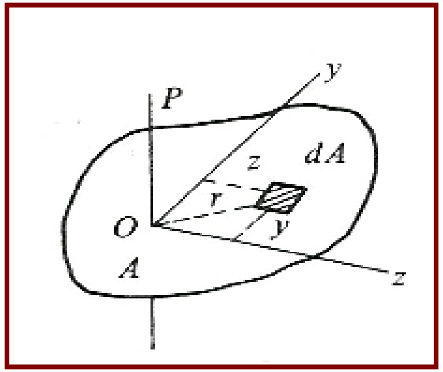
$$= I_z + \bar{y}^2 A \qquad (5\text{-}11)$$

단, $\int_A dA = A, \qquad \int_A y\,dA = 0 \qquad (5\text{-}2)$

정리 II

극관성모멘트(polar inertia moment)

: 단면내의 임의 직교축 (Z,Y축), 또 그 단면에 수직인 축을 P축이라면
P축에 관한 단면 A의 관성모멘트는 다음과 같다.



[그림 5-14] 단면에 수직인 P축

$$I_P = \int_A r^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA$$
$$= \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_z \qquad (5-12)$$

⇒ 이때 같은 원점을 지나는 또 다른 직교축 z_1, y_1축에 대해서도 마찬가지로 $I_p = I_{z_1} + I_{y_1}$가 된다. 이 I_p를 극관성모멘트라 한다.

5-7 단면계수의 비교

보의 설계 → 굽힘강성을 크게 할뿐 아니라 경제적인 측면에서도 고려해야 함으로 동일조건 하에서 단면적이 크도록 해야 함.

(1) 사각형 단면 :

$$Z = \frac{bh^{2}}{6} = \frac{Ah}{6} \qquad \text{(a)}$$

b : 폭
h : 높이

Z를 크게 하려면 h를 크게 할수록 더욱 효과적. 즉 정사각형 보다 높이가 큰 직사각형이 유리하지만 너무 높게 하면 좌굴 발생.

(2) 원형 단면 :

$$Z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{Ad}{8} = 0.125Ad \quad \text{(예제 4-5에서)} \tag{b}$$

(a)와 비교를 위해 h=√π·d/2인 정사각형을 고려, 사각형의 경우 Z=0.148Ad이므로 정사각형의 단면이 원형단면보다 더욱 효과적

(3) I형 단면 :

그림과 같이 단면적을 두 부분으로 나누어 중립축에서 먼 곳에 배치 즉, A/2를 h/2의 거리에 두도록 함

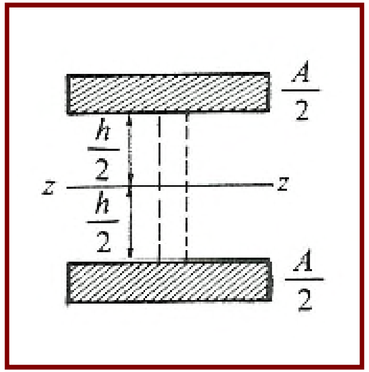


그림 5-16 I형 단면

웨브(web)가 존재

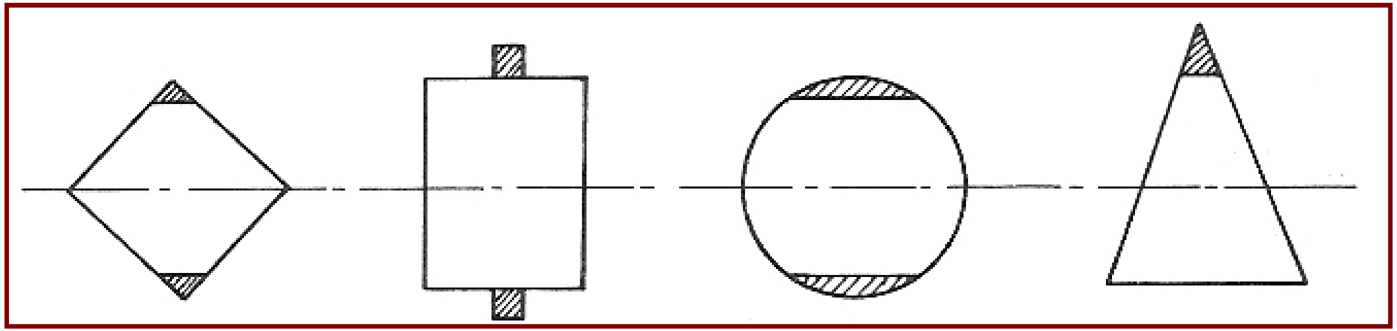
$$Iz = 2\times\frac{A}{2}\times\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Ah^2}{4}, Z = \frac{1}{2}Ah \tag{c}$$

$$Z \fallingdotseq 0.3Ah \tag{d}$$

이상 세가지 단면에서 비교하여 보면 I형 단면이 Z가 가장 크므로 경제적이며 그 다음으로 사각형단면임을 알 수 있다.

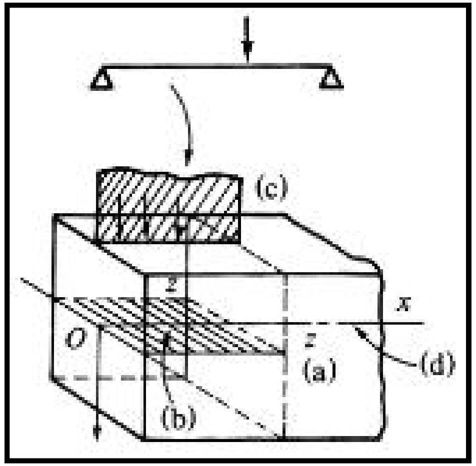
또한, I형 단면에서는 위의 다른 단면에 비해 좌굴(buckling)도 생기기 어렵기 때문에 보의 단면형태로 널리 사용된다.

$Z=I/c$(단면계수). 그림과 같이 빗금부분이 단면의 위나 아래에 있을 때는 이 돌기 부분을 없앰으로써 단면계수가 더 커지게 된다. 이것은 작은 면적을 제거함으로써 생긴 I_Z의 감소가 단면높이의 감소보다 작기 때문이다. 그러면, 작은 면적 부분에 큰 힘을 집중적으로 받게 되는 것을 방지하게 된다.



[그림 5-15] 단면의 돌기 부분(빗금 부분)

[예제 5-9] [그림 9(a)]는 사각형단면 보의 일부분을 나타낸다.
(a), (b), (c) 및 (d)의 명칭을 써보라

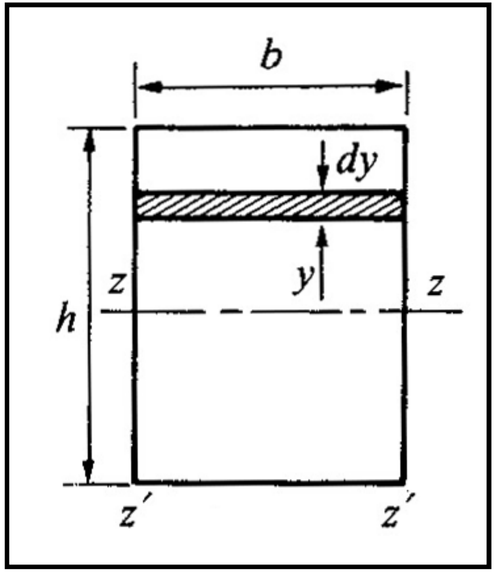


[그림 9(a)]

❖풀이

(a) 중립축(모멘트축, z-z축)
(b) 중립면,
(c) 하중면,
(d) 중심축(축심, O-z축)

[예제 5-10] [그림 9(b)]의 사각형단면의 관성모멘트를 구하라.



[그림 9(b)]

❖풀이

$$I_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12}$$

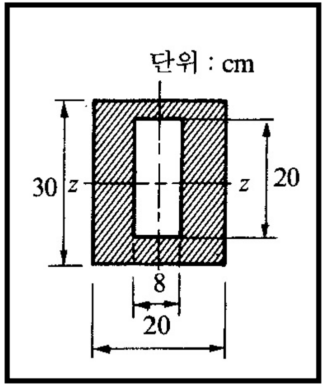
또는 $$2 \times \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b\,dy = \frac{bh^3}{12}$$

여기서 z-z는 도심축

$$I_{z'-z'} = \begin{cases} \int_0^h y^2 \cdot b\ dy = \dfrac{bh^3}{3} \text{ 또는} \\ I_z + \bar{y}^2 A = \dfrac{bh^3}{12} + \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 \cdot bh = \dfrac{bh^3}{3} \end{cases}$$

$$\therefore Z = \frac{I_z}{h/2} = \boxed{\frac{bh^2}{6}}$$

[예제 5-11] 그림 같이 속이 빈 사각형 단면의 빗금친 부분의 I_Z를 구하라.



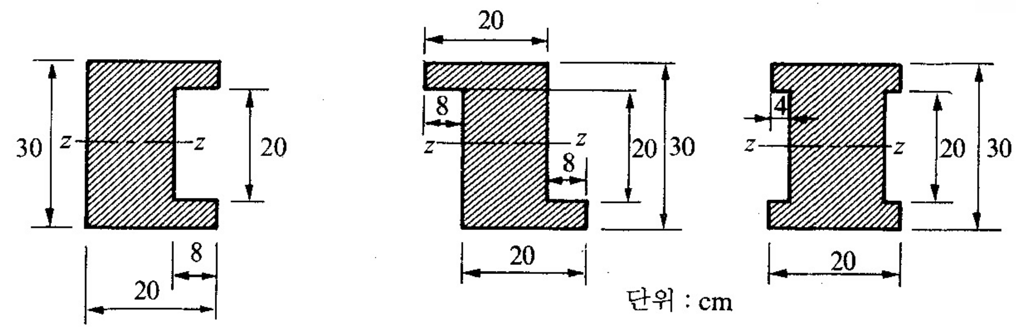
[그림 10]

❖ 풀이

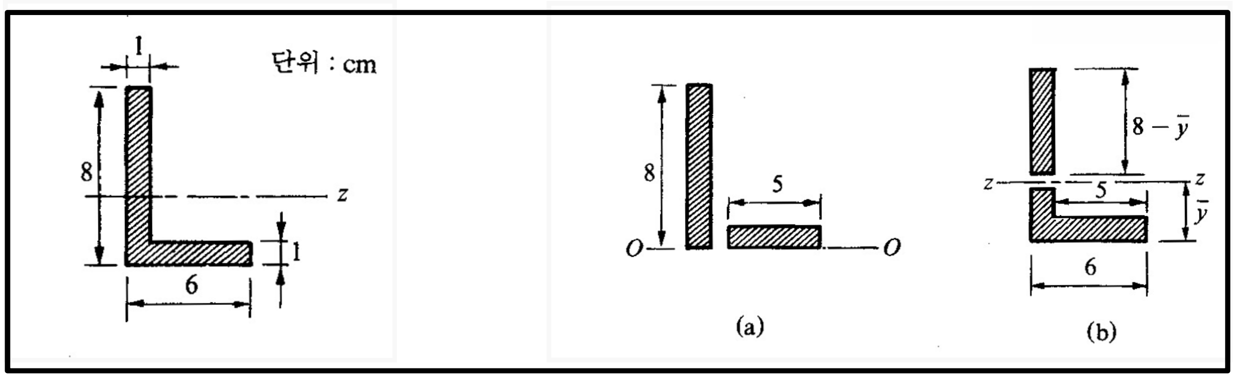
$$I_z = \frac{20 \times 30^3}{12} - \frac{8 \times 20^3}{12} = 39{,}667\,\text{cm}^4$$

참고

아래 단면들은 I_z는 같으나 I_y는 모두 다르다



[예제 5-12] [그림 11]의 형단면의 도심축인 축에 관한 를 구하라.



[그림 11]

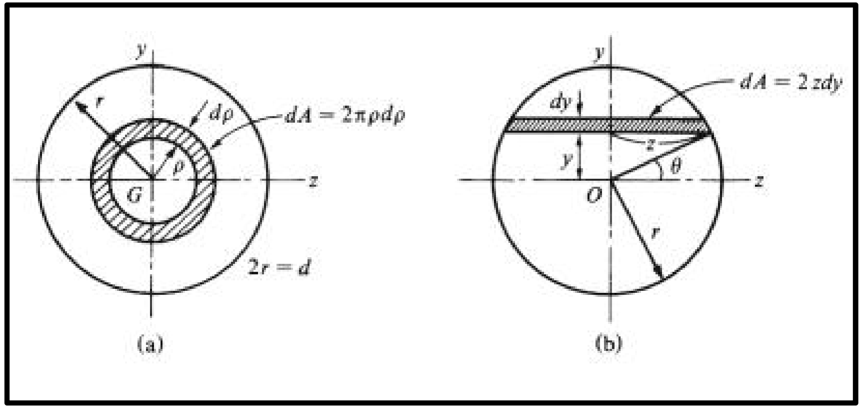
❖풀이 *그림(a)처럼 분할하여 각 형상의 중립축을 구한다.*

$$\bar{y} = \frac{8 \times 1 \times 4 + 5 \times 1 \times 0.5}{8 \times 1 + 5 \times 1} = 2.65\,\mathrm{cm}$$

그림(b)처럼 중립축을 기준하여 분할하고 I_z를 구한다.

$$\boxed{I_z = \frac{1 \times (8 - \bar{y})^3}{3} + \frac{6 \times \bar{y}^3}{3} - \frac{5 \times (\bar{y} - 1)^3}{3} = 81\,\mathrm{cm}^4}$$

[예제 5-13] 원형단면([그림 12])의 관성모멘트를 구하라.



[그림 12]

❖풀이 [그림(a)]에서 I_p를 구한다.

$$I_p = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_p = 2I_y = 2I_z = 2I = \frac{\pi d^4}{32} \qquad \therefore I = \frac{\pi d^4}{64}\left(= \frac{\pi r^4}{4}\right)$$

$$\therefore Z = \frac{\pi d^4}{64} / \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$I_z = \frac{\pi d_0^4}{64} - \frac{\pi d_i^4}{64} = \frac{\pi(d_0^4 - d_i^4)}{64}, \quad Z = \frac{\pi(d_0^4 - d_i^4)}{32 d_0}$$

[그림(a)]에서 I_z를 구해도 된다.

$$I_z = 2\int_0^r y^2 \cdot dA = 2\int_0^r y^2 \cdot 2zdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\sin\theta)^2 \cdot [2r\cos\theta \cdot r\cos\theta d\theta]$$

$$= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$\therefore\ M_{\max} = \frac{3}{8}\, w_0 l \cdot \frac{3}{8}\, l - \frac{w_0}{2}\left(\frac{3}{8}\, l\right)^2 = \frac{9\, w_0 l^2}{128}$$

$$= \frac{9 \times 10 \times 200^2}{128} = 28{,}125\ \mathrm{kgf \cdot cm}$$

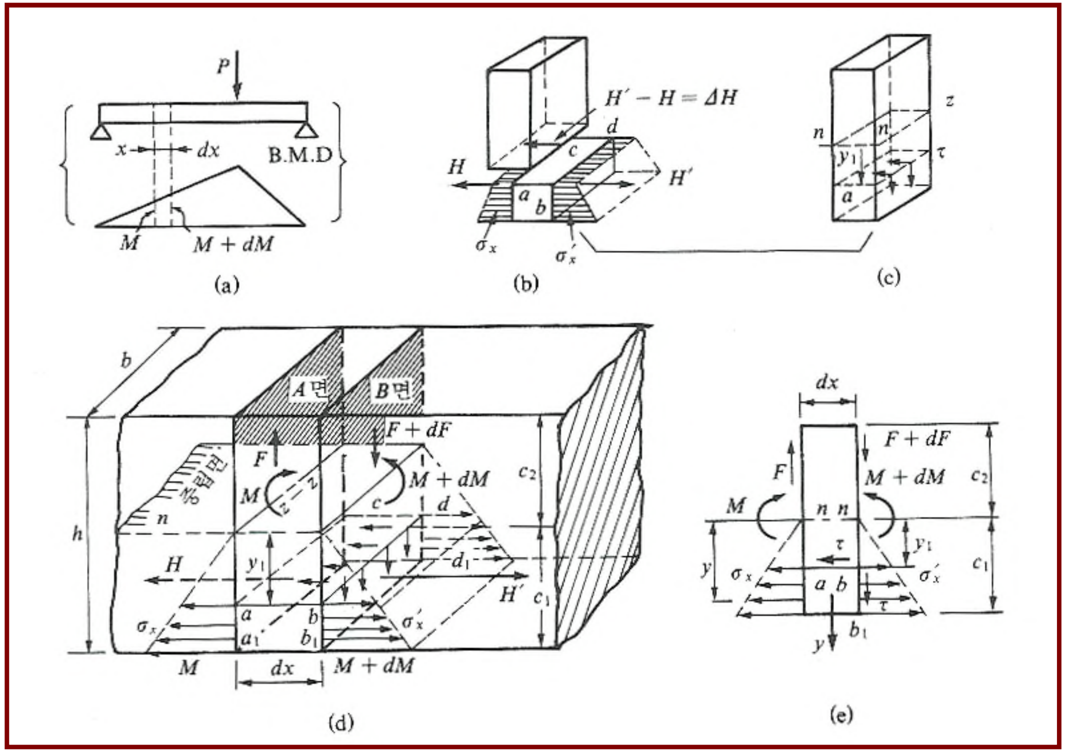
$$\therefore\ \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \sigma_{al}$$

$$Z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{al}}$$

$$\therefore\ d = \sqrt[3]{\frac{32 \times M_{\max}}{\pi \times \sigma_{al}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 28{,}125}{3.14 \times 800}} = 7.1\ \mathrm{cm}$$

5-8 굽힘보 내의 전단응력

순수굽힘이 아닌 경우 보에 전단력이 발생하므로 전단응력이 생김



[그림 5-16] 보 속의 전단응력 (사각형단면의 예)

일반적으로 보는 순수굽힘이 아니므로 (a)의 BMD처럼 굽힘모멘트의 값이 달라짐. 그림 (a)에서 보의 임의요소 dx부분을 생각한다. A면에 M, B면에 M+dM의 굽힘모멘트가 있을 때, 중립면 n−n에서 거리 y_1에 있는 층(중립면과 평행)의 굽힘응력을 A면에서 σ_x, B면에서 σ_x'라 하면 다음 식이 성립함.

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} y$$

$$\sigma_x' = \frac{M + dM}{I_z} y$$

지금 중립면에서 거리y_1에 있는 면 abcd보다 아랫 부분의 A면과 B면의 힘,H, H'는 아래 식과 같다.

$$H = \int_{y_1}^{c_1} \sigma_x dA = \int_{y_1}^{c_1} \frac{M}{I_z} y \cdot dA$$

$$H' = \int_{y_1}^{c_1} \sigma_x' dA = \int_{y_1}^{c_1} \frac{M + dM}{I_z} y \cdot dA \qquad (5-13)$$

이때 그림b처럼 H=H'−H인 힘의 차이 때문에 abcd 아랫부분은 전단되면서 한 쪽으로 움직인다. 면 abcd의 면적은 b·dx이고 ΔH의 변화만큼 면abcd상에 분포되는 전단응력 τ은 아래와 같은 식이 된다.

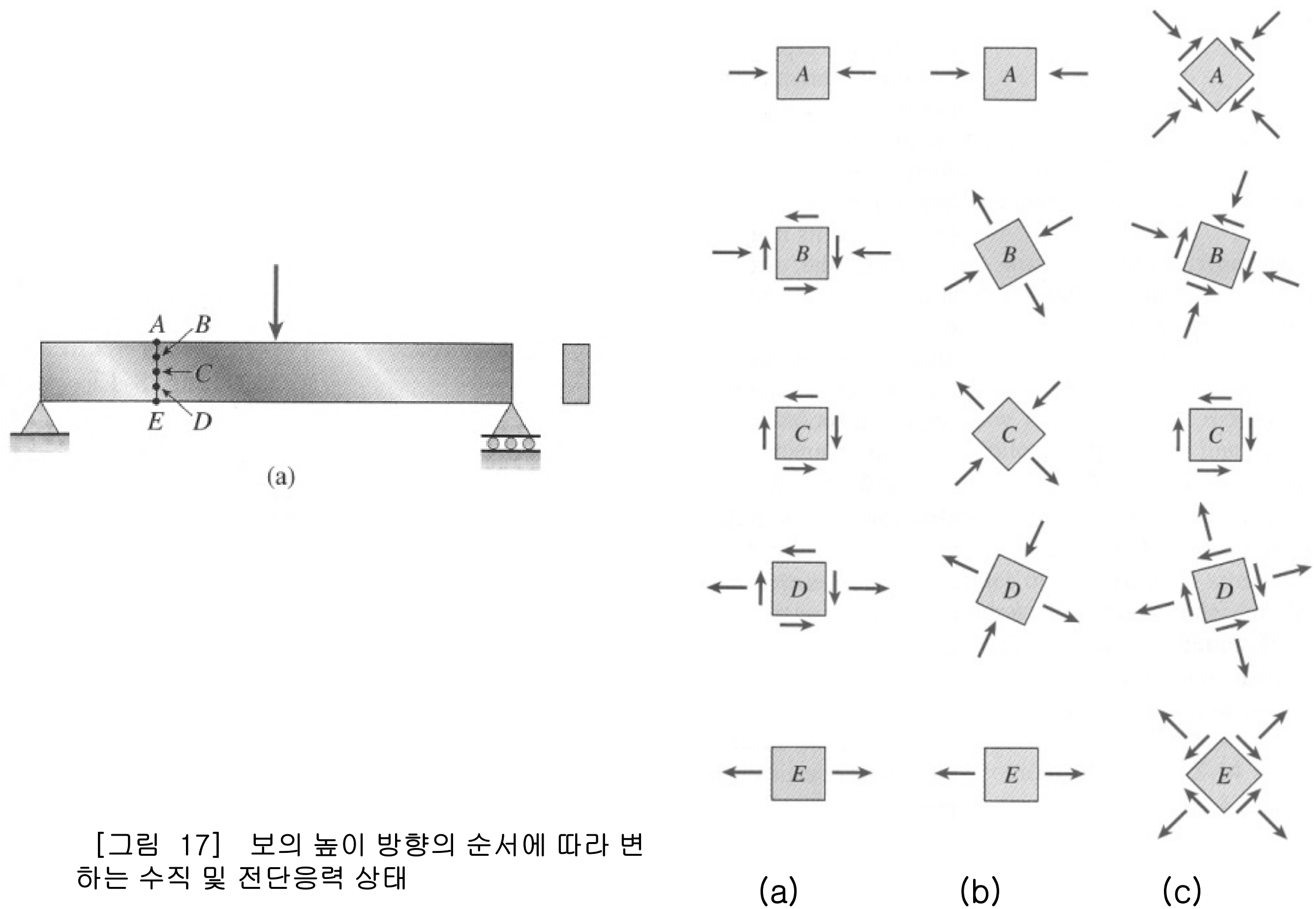
$$\tau = \frac{\Delta H}{b \cdot dx} = \frac{dM}{I_z}\int_{y_1}^{c_1}(y\,dA)/(b\,dx) = \frac{dM}{b\,dx\,I_z}\int_{y_1}^{c_1} y\,dA = \frac{FQ}{bI_z} \qquad (5\text{-}14)$$

단,

$$\Delta H = \frac{dM}{I_z}\int_{y_1}^{c_1} y\,dA, \quad \frac{dM}{dx} = F$$

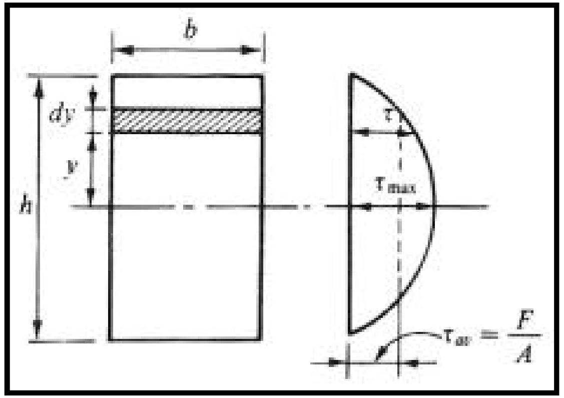
$Q = \int_{y_1}^{c_1} y \cdot dA$: 그림에서 면 bdd_1b_1의 단면 1차모멘트

이 때 당연히 면 abdc와 직각이 되는 면 B에도, bd선에 따라 위에서와 같은 균일한 크기의 τ가 있다. 이 τ는 중립면에서 거리 y_1에 있는 전단응력인데 y_1의 위치에 따라 τ의 크기가 달라진다.



[그림 17] 보의 높이 방향의 순서에 따라 변하는 수직 및 전단응력 상태

[예제 5-14] [그림 13]의 사각형단면의 최대 전단응력을 구하라.



[그림 14]

❖풀이

b X h의 사각형단면에서

$c_1 = c_2 = \frac{h}{2}$, $dA = b\,dy$이므로 식 (5-27)에서 τ를 구한다.

$$Q = \int_y^{\frac{h}{2}} y \cdot b \cdot dy = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

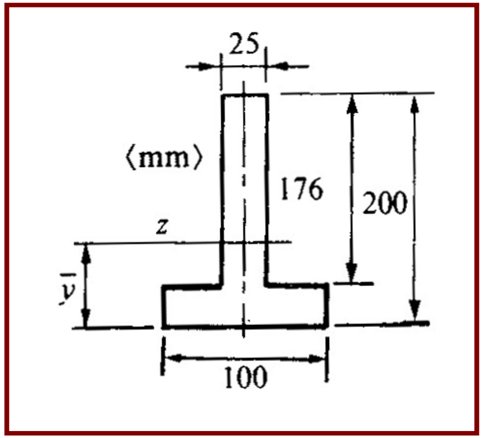
$$\therefore \tau = \frac{F}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

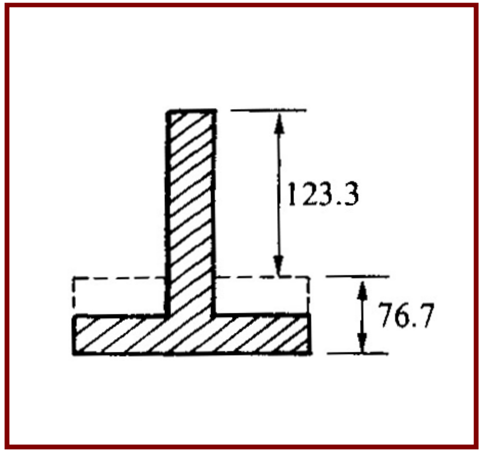
$$= \frac{6F}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

이 τ는 의 함수가 된다. τ 의 분포는 그림과 같이 포물선으로 변하며 단면 상하의 끝에서는 0이다. τ_{max}은 y_1=0인 중립면에 생기며 그 크기는 아래와 같다.

$$\tau_{\max} = \frac{3F}{2A} = 1.5\tau_{av} \quad 단,\ \tau_{av} = \frac{F}{A}$$

[예제 5-15] 그림 5-13의 역 T형 단면에서 웨브(web)에 생기는 τ_{max}을 구하라. 단면의 전단력은 600kgf이다.





[그림 14]

❖풀이

$\tau=FQ/bI_z$의 식으로 해를 하기 위해 각 값을 구한다.

$$\therefore \bar{y} = \frac{10 \times 2.4 \times \frac{2.4}{2} + 2.5 \times 17.6 \times \left(2.4 + \frac{17.6}{2}\right)}{10 \times 2.4 + 2.5 \times 17.6}$$

$$= 7.67\,\text{cm}$$

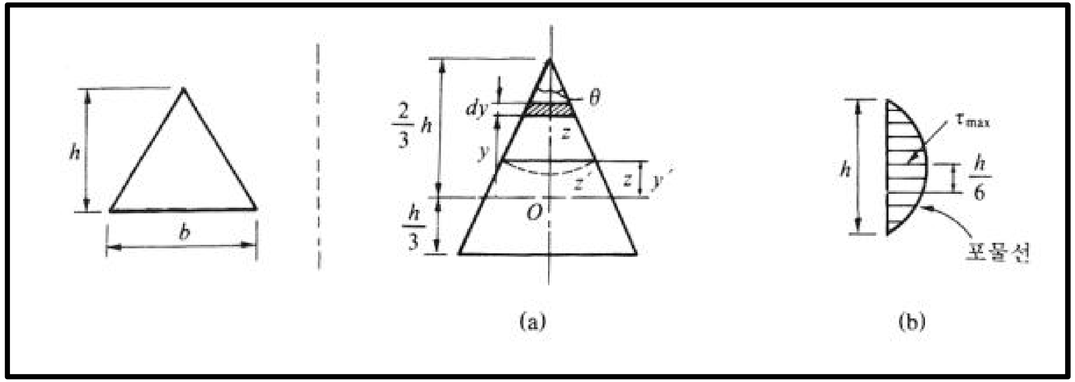
$$I_z = \frac{2.5 \times (20 - 7.67)^3}{3} + \frac{10 \times 7.67^3}{3}$$

$$- \frac{(10 - 2.5) \times (7.67 - 2.4)^3}{3} = 2{,}700\,\text{cm}^4$$

$$Q = 2.5 \times (20 - 7.67) \times \frac{(20 - 7.67)}{2} = 190\,\text{cm}^3$$

$$\therefore \tau_{max} = \frac{F \cdot Q}{b \cdot I_z} = \frac{600 \times 190}{2.5 \times 2{,}700} = 16.9\,\text{kgf/cm}^2$$

[예제 5-16] 이등변 삼각형단면에서 굽힘에 의한 전단응력분포를 구하라.



[그림 15]

❖풀이

식 (5-27)에서 해를 구한다. [그림(a)]에서 식 (1), (2)의 관계를 얻는다.

$$\frac{b}{h}=\frac{z'}{\frac{2}{3}h-y'}$$

$$z'=\frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h-y'\right),\quad z=\frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h-y\right)$$

$$A=\frac{bh}{2},\quad I_z=\frac{bh^3}{36}$$

[예제 5-16] 이등변 삼각형단면에서 굽힘에 의한 전단응력분포를 구하라.

❖풀이

$$Q = \int_{y1}^{\frac{2}{3}h} z \cdot dy \cdot y = \frac{b}{h}\int_{y1}^{\frac{2}{3}h}\left(\frac{2}{3}h - y\right)y\,dy = \frac{b}{81h}(4h^3 - 27hy_1^2 + 27y_1^3)$$

$$\tau = \frac{FQ}{z'I_z} = \frac{4}{3}\frac{F}{bh^3}\frac{4h^3 - 27hy'^2 + 27y'^3}{2h - 3y'} = \frac{2}{3}\tau_{av}\left(2 + 3\frac{y_1}{h} - 9\frac{y_1^2}{h^2}\right)$$

양 변의 전단응력은 식 (3)으로 된다.

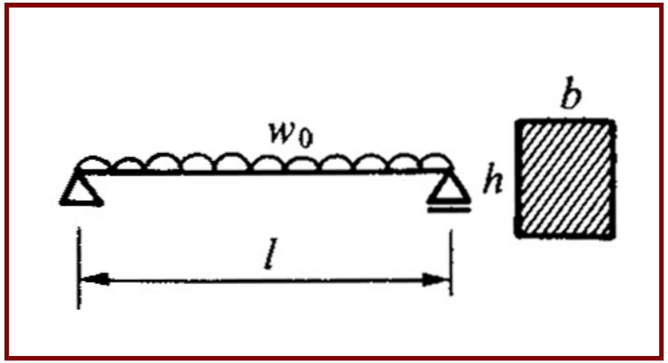
$$\tau_1 = \frac{\tau}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{b^2 + 4h^2}}{2h}\tau$$

정점 및 밑변에서 $\tau=0$, τ 또는 τ_1의 최대값은 $\frac{d\tau}{dy'} = 0$ 에서 $y' = \frac{h}{6}$이다.

이것은 높이의 중앙이다. 이때 $\tau_{\max} = \frac{3}{2}\tau_{av}$ 이고, 전단응력의 분포는

포물선이 된다.

[예제 5-17] 사각형단면을 갖는 보에 작용하는 두 응력 σ_{max}, τ_{max}을 비교하라.



[그림 16]

❖풀이

굽힘응력의 최대값 σ_{max}은 중앙단면에 생기며 크기는식 (5-23)과 같다.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z} = \frac{w_0 l^2/8}{bh^2/6} = \frac{3w_0 l^2}{4bh^2}$$

전단응력의 최대값은 중립축에 생기며

전단력의 최대값이 있는 지점에서 생긴다.

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{F_{max}}{A} = \frac{3}{2}\frac{w_0 l/2}{bh} = \frac{3}{4}\frac{w_0 l}{bh}$$

$$\therefore \frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = \frac{l}{h}$$