Ch. 7 선형대수학: 행렬, 벡터, 행렬식, 선형연립방정식

- 선형연립방정식은 전기회로, 기계 구조물, 경계모델, 최적화 문제, 미분방정식의 수치해 등을 다룰 때 나타남
- 선형연립방정식의 문제를 해결하는데, 행렬과 벡터 이용

7.1 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

- **행렬(Matrix) :** 수(혹은 함수)를 직사각형 모양으로 괄호 안에 배열한 것
  - **원소**(Entry) 또는 **요소**(Element): 행렬에 배열되는 수(혹은 함수)
  - **행**(Row) : 수평선
  - **열**(Column) : 수직선
- 일반적인 표기법과 개념

$$\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : m \times n \text{ 행렬}$$

  - 행렬은 굵은 대문자로 나타낸다
  - 첫 번째 아래 첨자 j는 행(Row)
  - 두 번째 아래 첨자 k는 열(Column)
  - a_{jk} : j 행, k 열의 원소(Element)

7.1 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

- **정방행렬**(Square Matrix)
  - $m=n$ 이라면 **A**는 정사각형 모양이다
  - 정방행렬에서 원소 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 을 포함하는 대각선을 행렬 **A** 의 주대각선 (Principal Diagonal)이라고 한다
- **벡터**(Vector) : 한 개의 행이나 열로 구성된 행렬
  - **행벡터**(Row Vector) : 하나의 행으로 구성

$$\mathbf{a} = [a_1, \quad a_2, \quad \cdots \quad a_n]$$

  - **열벡터**(Column Vector) : 하나의 열로 구성

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

7.1 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

- **행렬의 상등**(Equality of Matrices)

  : 행렬의 크기가 같으며 대응되는 원소들이 모두 같은 경우

- **행렬의 가법**(Matrix Addition)

  : 같은 크기의 행렬에 대해서만 정의되고, 그 합은 대응하는 원소를 각각 합함으로 얻어진다.

- **스칼라곱**(Scalar Multiplication)

  : 행렬의 각 원소에 상수를 곱하여 얻어진다.

- **행렬의 가법과 스칼라곱에 대한 연산법칙**

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (c+k)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+k\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A} \qquad c(k\mathbf{A})=(ck)\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0} \qquad 1\mathbf{A}=\mathbf{A}$$

7.2 행렬의 곱

- **행렬과 행렬의 곱(Matrix Multiplication)**

: $r \times p$행렬 $\mathbf{B} = [b_{jk}]$의 행수 r와 $m \times n$행렬 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$의 열수 n가 서로 같아야

정의되며 $c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jl} b_{lk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \cdots + a_{jn} b_{nk}$ 를 원소로 하는 $m \times p$행렬로

정의된다.

❖ **AB**는 정의되지만 **BA**는 정의되지 않을 수 있다

- **행렬의 곱은 비가환적(Not Commutative)이다.** $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

- **행렬의 곱에 대한 연산법칙**

$$(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \qquad (\text{결합법칙}(\text{Associative Low}))$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \qquad (\text{분배법칙}(\text{Distrivutive Low}))$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB} \qquad (\text{분배법칙}(\text{Distrivutive Low}))$$

7.2 행렬의 곱

- **행렬과 벡터의 전치**(Transposition of Matrices)

  : 열과 행이 서로 바뀌어 얻어진 행렬.

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] \Rightarrow \mathbf{A}^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

❖ 정방행렬에 대한 전치는 주대각선에 관하여 대칭으로 위치된 원소들을 서로 바꾼 것이다.

- **전치 연산에 대한 법칙**

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

7.2 행렬의 곱

- **특수한 행렬**(Special Matrices)
- **대칭행렬**(Symmetric Matrix) : 전치가 본래의 행렬과 같은 정방행렬 $\left(\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\right)$
- **반대칭행렬**(Skew- symmetric Matrix)
  : 전치가 본래의 행렬의 음이 되는 정방행렬 $\left(\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}\right)$
- **삼각행렬**(Triangular Matrix)
- **위삼각행렬**(Upper Triangular Matrix)
  : 주대각선을 포함하여 그 위쪽으로만 0이 아닌 원소를 갖는 정방행렬
- **아래삼각행렬**(Lower Triangular Matrix)
  : 주대각선을 포함하여 그 아래쪽으로만 0이 아닌 원소를 갖는 정방행렬
- **대각행렬**(Diagonal Matrix)
  : 주대각선 상에서만 0이 아닌 원소를 가질 수 있는 정방행렬
- **스칼라 행렬**(Scalar Matrix) : 주대각선 원소들이 모두 같은 대각행렬
- **단위행렬**(Unit 또는 Identity Matrix) : 주대각선 원소들이 모두 1은 대각행렬

7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법

- 선형연립방정식, 계수행렬, 첨가행렬
- 선형연립방정식 :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- **제차연립방정식**(Homogeneous Simultaneous System)

  : b_j 가 모두 0인 경우

- **비제차연립방정식**(Nonhomogeneous Simultaneous System)

  : b_j 중 적어도 하나는 0이 아닌 경우

7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법

● 선형연립방정식의 행렬표현 : $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- **계수행렬**(Coefficient Matrix) : **A**
- **해벡터**(Solution Vector) : **x**
- **첨가행렬**(Augmented matrix) : 계수행렬 **A**에 열벡터 **b**를 첨가한 행렬

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법

- **가우스 소거법과 후치환**(Gauss Elimination and Back Substitution)

연립방정식	첨가행렬
$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ -4x_1 + 3x_2 &= -30 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -30 \end{bmatrix}$

Step 1 x_1 을 소거 : 첫 번째 식에 두 배 한 후, 이를 두 번째 식에 더한다.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ 13x_2 &= -26 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 13 & -26 \end{bmatrix}$$

Step 2 후치환(Back Substitution) : x_2, x_1 순으로 해를 구한다.

마지막 방정식에서 해를 구한 후, 그 결과를 역순으로 첫째 방정식에 대입하여 정리한다.

$$x_2 = {-26}/{13} = -2, \quad x_1 = \frac{1}{2}(2 - 5x_2) = \frac{1}{2}(2 - 5(-2)) = 6$$

7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법

● **기본행연산. 행동치 연립방정식**(Elementary Row Operations. Row-Equivalent Systems)

<방정식에 대한 기본연산> ⟷ **<행렬에 대한 기본행연산>**

<방정식에 대한 기본연산>	**<행렬에 대한 기본행연산>**
• 두 방정식을 교환하는 것	• 두 행을 교환하는 것
• 한 방정식의 상수배를 다른 방정식에 더하는 것	• 한 행의 상수배를 다른 행에 더하는 것
• 한 방정식에 0이 아닌 상수를 곱하는 것	• 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하는 것

❖ 기본 행연산을 이용하여 미지수를 하나씩 소거하여 대각선 아래의 계수를 0으로 만든다

7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법

- **행동치**(Row-Equivalent)

  : 선형시스템 S_1 이 선형시스템 S_2 에 유한번의 기본행연산을 가하여 얻어질 수 있다면 S_1 을 S_2 의 **행동치**라 한다.

- **행동치 연립방정식**(Row-Equivalent Systems)

  : 행동치 연립방정식들은 같은 해집합을 갖는다.

- **Gauss 소거법 :** 연립방정식의 세가지 경우

- 무한히 많은 해가 존재하는 경우(미지수의 수가 방정식의 수보다 많은 경우)
- 유일한 해가 존재하는 경우
- 해가 존재하지 않는 경우(연립방정식의 해가 존재하지 않는 경우)

7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법

- Ex.3 4개의 미지수를 갖는 3개의 선형연립방정식, 그리고 이에 대응하는 아래의 첨가행렬을 가진 연립방정식의 해를 구하라.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & 2.1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 0.6x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 - 5.4x_4 &= 2.7 \\ 1.2x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 + 2.4x_4 &= 2.1 \end{aligned}$$

Step 1 x_1 을 소거

첫째 방정식에 $-0.6/3.0 = -0.2$ 배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

첫째 방정식에 $-1.2/3.0 = -0.4$ 배 하여 세 번째 방정식에 더하라.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & -1.1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 2\text{행} + (-0.2) \times 1\text{행} \\ 3\text{행} + (-0.4) \times 1\text{행} \end{array} \qquad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ -1.1x_2 - 1.1x_3 + 4.4x_4 &= -1.1 \end{aligned}$$

7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법

Step 2 x_2을 소거 : 두번째 방정식에 $1.1/1.1=1$ 배 하여 세 번째 방정식에 더하라

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & \vdots & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3\text{행}+2\text{행} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Step 3 후치환 $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4, \quad x_1 = 2 - x_4$

x_3와 x_4 는 임의로 결정할 수 있는 수이므로, 무한히 많은 해가 얻어진다.

7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법

- Ex.4 Gauss 소거법을 해가 존재하지 않는 연립방정식에 적용

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 6 & 2 & 4 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Step 1 x_1 을 소거

첫째 방정식에 $-2/3$ 배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

첫째 방정식에 $-6/3 = -2$ 배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 2\text{행} + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 1\text{행} \\ 3\text{행} + (-2) \times 1\text{행} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법

Step 2 x_2을 소거 : 세 번째 식에서 x_2를 소거

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right] \text{3행}+(-6)\times 2\text{행}$$

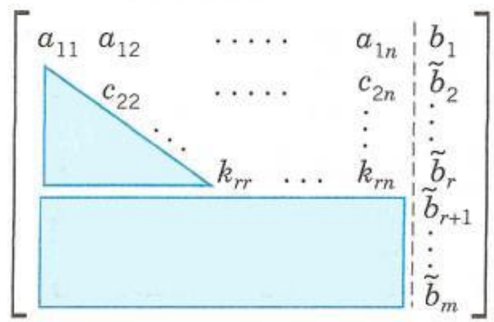
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ 0 &= 12 \end{aligned}$$

모순이 되어 연립방정식은 해를 갖지 않는다.

7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법

- 행사다리꼴(Row Echelon Form)과 행 사다리꼴로부터의 정보
- 행사다리꼴

: Gauss 소거법의 마지막 단계에서 보는 계수행렬과 첨가행렬의 형태와 이에 대응하는 연립방정식



- 3가지 가능한 경우:
- 정확하게 하나의 해가 존재한다. : $r = n$ 이고 $\tilde{b}_{r+1}, \cdots, \tilde{b}_m$ 이 모두 0이다.
- 무한히 많은 해가 존재한다. : $r < n$ 이고 $\tilde{b}_{r+1}, \cdots, \tilde{b}_m$ 이 모두 0이다.
- 해가 없다. : $r < m$ 이고 $\tilde{b}_{r+1}, \cdots, \tilde{b}_m$ 중 하나라도 0이이 아니다.

7.4 일차 독립. 행렬의 계수. 벡터공간

벡터의 일차 독립과 종속성

$$c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0} \quad (c: \text{스칼라}, \ \mathbf{a}: \text{벡터})$$

- **일차 독립**(Linearly Independent) : 모든 $c_j = 0$ 일 때만 위 식이 만족
- **일차 종속**(Linearly Dependent) : 어떤 $c_j \neq 0$ 이어도 위 식이 만족

7.4 일차 독립. 행렬의 계수. 벡터공간

- **행렬의 계수**(Rank) : 행렬에서 1차독립인 행벡터의 최대수이며 rank(**A**)라 표시

- **행동치인 행렬**

  행동치인 행렬들은 같은 계수를 갖는다.

- **일차종속성**과 **일차독립성**

  각각 n개의 성분을 갖는 p개의 벡터들은 이 벡터들을 행벡터로 취하여 구성된 행렬의 계수가 p이면 일차독립이고, 그 계수가 p보다 작으면 일차종속이다.

- **열벡터에 의한 계수**

  행렬의 계수는 행렬의 일차독립인 열벡터의 최대수와 같다.

  ⇒ 행렬과 행렬의 전치는 같은 계수를 갖는다.

- **벡터의 일차종속**

  $n(< p)$개의 성분을 갖는 p개의 벡터들은 항상 일차종속이다.

7.4 일차 독립. 행렬의 계수. 벡터공간

- **벡터공간** (Vector Space)

  : 공집합이 아닌 벡터의 집합에 속해 있는 임의의 두 원소에 대하여, 이들의 일차결합이 다시 집합의 원소가 되며 다음 법칙을 만족하는 벡터들의 집합

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (c+k)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+k\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A} \qquad c(k\mathbf{A})=(ck)\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0} \qquad 1\mathbf{A}=\mathbf{A}$$

- **차원**(Dimension): 벡터공간내의 일차독립인 벡터들의 최대수이며 dim(V)로 표기
- **기저**(Basis)

  : 벡터공간내의 최대로 가능한 수의 일차독립인 벡터로 구성되는 부분집합이며 기저가 되는 벡터의 수는 차원과 같다.

7.4 일차 독립. 행렬의 계수. 벡터공간

- **생성공간**(Span)

  : 성분의 수가 같은 벡터들에 관한 일차결합으로 표환되는 모든 벡터들의 집합

- **부분공간**(Subspace)

  : 벡터공간에서 정의된 벡터합과 스칼라곱에 관하여 닫혀있는 부분집합

7.4 일차 독립. 행렬의 계수. 벡터공간

- **$\mathbf{R}^n$ 벡터공간**

  n개의 성분을 갖는 모든 벡터들로 이루어진 벡터공간 $\mathbf{R}^n$ 의 차원 n이다.

- **행공간**(Row Space) : 행벡터들의 생성공간
- **열공간**(Column Space) : 열벡터들의 생성공간

- **행공간과 열공간**

  행렬의 행공간과 열공간은 차원이 같고, 행렬의 계수와도 동일하다.

- **영공간**(Null Space) : $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$의 해집합
- **퇴화차수**(Nullity) : 영공간의 차원

$$\mathbf{A}\text{의 계수} + \mathbf{A}\text{의 퇴화차수} = \mathbf{A}\text{의 행계수}$$

7.5 선형연립방정식의 해 : 존재성, 유일성

선형연립방정식에 대한 기본정리

- **존재성**(Existence)

  : 선형연립방정식이 **모순이 없기 위한**(Consistent), 다시 말해서 해를 갖기 위한, 필요충분조건은 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수를 갖는 것이다.

- **유일성**(Uniqueness)

  : 선형연립방정식이 유일한 해를 갖기 위한 필요충분조건은 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수를 갖는 것이다.

- **무수히 많은 해**(Infinitely Many Solutions)

  : 계수행렬의 계수가 미지수의 개수보다 작으면 무수히 많은 해가 존재

- Gauss **소거법**(Gauss Elimination)

  : 해가 존재하면 Gauss 소거법에 의해 모두 구해질 수 있다.

7.5 선형연립방정식의 해 : 존재성, 유일성

- **제차연립방정식**
  - 제차연립방정식은 항상 자명한 해(Trivial Solution)을 갖는다.

    계수행렬의 계수 = r, 미지수의 갯수 = n라 하자.
  - 자명하지 않은 해가 존재할 필요충분조건 : $r < n$
  - $r < n$이면 해공간은 $n-r$차원 벡터공간이다.
  - 제차연립방정식의 두 해벡터의 일차결합도 제차연립방정식의 해이다.
- **미지수보다 방정식의 수가 적은 제차 선형연립방정식**

  방정식의 수가 미지수의 수보다 적은 제차연립방정식은 항상 자명하지 않은 해 (Nontrivial Solution)를 갖는다.
- 비제차연립방정식

  만약 비제차 연립방정식이 해를 갖는다면 모든 해는 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h$ 와 같은 형태가 된다.

  $\mathbf{x}_0$ 은 고정된 임의의 해이고 $\mathbf{x}_h$ 는 대응하는 제차연립방정식의 모든 해를 대표한다.

7.6 참고사항 : 2차 및 3차 행렬식

- **2차 행렬식**(Determinant of Second Order)

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 선형연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{D} \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{D} \end{aligned}$$

7.6 참고사항 : 2차 및 3차 행렬식

- **3차 행렬식**(Determinant of Third Order)

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{13}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

7.6 참고사항 : 2차 및 3차 행렬식

- 선형연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

7.7 행렬식. Cramer의 법칙

- ***n*차 행렬식**(Determinant of Third Order)

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n = 1$이면 $D = a_{11}$

$n \geq 2$이면 $D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

또는 $D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$,

$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$, $\quad M_{jk}$는 $n-1$차의 행렬식

- **소행렬식**(Minor) : M_{jk}
- **여인수**(Cofactor) : C_{jk}

7.7 행렬식. Cramer의 법칙

- **기본행연산항(Elementary Row Operation)에서의 *n*차 행렬식의 양태**
- 두 행을 바꾸는 것은 행렬식의 값에 -1을 곱하는 것이다.
- 한 행의 상수배를 다른 행에 더하는 것은 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
- 한 행에 상수를 곱하는 것은 행렬식의 값에 상수를 곱하는 것이다.

7.7 행렬식. Cramer의 법칙

추가적인 *n*차 행렬식의 성질

- 두 열을 바꾸는 것은 행렬식의 값에 -1을 곱하는 것이다.
- 한 열의 상수배를 다른 열에 더하는 것은 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
- 한 열에 상수를 곱하는 것은 행렬식의 값에 상수를 곱하는 것이다.
- 전치(Transposition)는 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
- **0행 또는 0열**은 행렬식의 값을 0으로 만든다.
- **같은 비율의 행 또는 열**은 행렬식의 값을 0으로 만든다.

7.7 행렬식. Cramer의 법칙

● **행렬식에 의한 계수**

$m \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 가 계수 $r(\geq 1)$을 갖기 위한 필요충분조건은 **A**의 $r \times r$ 부분행렬의 행렬식은 0이 되지 않는 반면, **A**의 $(r+1)\times(r+1)$ 또는 그 이상의 행을 갖는 모든 정방 부분행렬의 행렬식은 0 이 되는 것이다. 특히, **A** 가 정방행렬 $n \times n$일 때, 계수가 n일 필요충분조건은 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ 이다.

● **Cramer의 정리(행렬식에 의한 선형연립방정식의 해)**

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \quad \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \quad x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

D_k는 D의 k번째 열을 $b_1, \cdots, b_n$인 원소로 갖는 열로 대치하여 얻은 행렬식

7.8 역행렬. Gauss-Jordan 소거법

- **역행렬**(Inverse Matrix)

$$\mathbf{A}^{-1} : \mathbf{A} = [a_{jk}] \text{의 역행렬} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

- **정칙행렬**(Nonsingular Matrix) : 역행렬을 갖는 경우
- **특이행렬**(Singular Matrix) : 역행렬을 갖지 않는 경우
- 역행렬을 가지면 그 역행렬은 유일하다.

- **역행렬의 존재성**

A가 $n \times n$행렬일 때, 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$ 이 존재 $\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0$

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\text{는 정칙행렬}$$

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < n \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\text{는 특이행렬}$$

7.8 역행렬. Gauss-Jordan 소거법

- **Gauss-Jordan 소거법에 의한 역행렬의 결정**

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \ \vdots \ \mathbf{I}] \xrightarrow{\text{Gauss 소거법}} [\mathbf{I} \ \vdots \ \mathbf{K}] \quad \Rightarrow \quad \therefore \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{K}$$

- Ex.1 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$[\mathbf{A} \ \vdots \ \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{2행}+3\times\text{1행} \\ \text{3행}-\text{1행} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{3행}-\text{2행} \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\text{1행} \\ 0.5\times\text{2행} \\ -0.2\times\text{3행} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{1행}+2\times\text{3행} \\ \text{2행}-3.5\times\text{3행} \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{1행}+\text{2행} \\ \\ \\ \end{array}$$

7.8 역행렬. Gauss-Jordan 소거법

- **역행렬에 대한 유용한 식**

$$n \times n \text{ 행렬 } \mathbf{A} = [a_{jk}] \text{의 역행렬은 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[\mathbf{C}_{jk}] = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \cdots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \cdots & \mathbf{C}_{nn} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}_{jk}$는 $\det \mathbf{A}$에서 a_{jk}의 여인수

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{의 역행렬은 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

7.8 역행렬. Gauss-Jordan 소거법

- Ex.3 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 4\end{bmatrix}$

$$\det\mathbf{A}=-1(-7)-1\cdot 13+2\cdot 8=10,\quad \mathbf{C}_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-7,\ \mathbf{C}_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2,\ \mathbf{C}_{31}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3,$$

$$\mathbf{C}_{12}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-13,\ \mathbf{C}_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-2,\ \mathbf{C}_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7,$$

$$\mathbf{C}_{13}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=8,\ \mathbf{C}_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=2,\ \mathbf{C}_{33}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-2\quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-0.7 & 0.2 & 0.3\\ -1.3 & -0.2 & 0.7\\ 0.8 & 0.2 & -0.2\end{bmatrix}$$

7.8 역행렬. Gauss-Jordan 소거법

- **대각행렬의 역행렬**

대각행렬 $\mathbf{A}=\left[a_{jk}\right]$ 의 역행렬이 존재 $\Leftrightarrow$ $a_{jj}\neq 0\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

$\mathbf{A}^{-1}$은 $1/a_{11},\ \cdots,\ 1/a_{nn}$ 이 대각원소인 행렬

- **Ex.4** $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0.25 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- **두 행렬의 곱 :** $(\mathbf{AC})^{-1}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

$$(\mathbf{AC}\cdots\mathbf{PQ})^{-1}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\cdots\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

- **역행렬의 역행렬 :** $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$

7.8 역행렬. Gauss-Jordan 소거법

행렬의 곱에 대한 특이 성질. 약분법

- 행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않는다. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (일반적으로 성립하지 않는다.)
- $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 일 때 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 또는$\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 이 아닐 수도 있다.

Ex. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{AC} = \mathbf{AD}$ 일 때 $\mathbf{C} \neq \mathbf{D}$ 일 수도 있다(심지어 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 일 때에도).

7.8 역행렬. Gauss-Jordan 소거법

- **약분법칙**

  $\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}$를 $n \times n$행렬이라 하자.

- rank**A** = n이고 **AB** = **AC**이면, **B** = **C** 이다.
- rank**A** = n 이면 **AB** = **0**은 **B** = **0** 을 의미한다.

  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$이면서 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이고 $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$이면 $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$이고 $\operatorname{rank} \mathbf{B} < n$
- **A**가 특이행렬이면 **AB**와 **BA**도 또한 특이행렬이다.

- **행렬곱의 행렬식 :** $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$

7.9 벡터공간, 내적공간, 일차변환

실벡터공간(Real Vector Space)

- **벡터의 덧셈 :** $\mathbf{a}+\mathbf{b}$

  가환성(Commutativity) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

  결합성(Associativity) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

  영벡터(Zero Vector) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$

  $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$

- **스칼라곱 :** $k\mathbf{a}$

  분배성(Distributivity) $c(\mathbf{a}+\mathbf{b})=c\mathbf{a}+c\mathbf{b}$

  분배성(Distributivity) $(c+k)\mathbf{a}=c\mathbf{a}+k\mathbf{a}$

  결합성(Associativity) $c(k\mathbf{a})=(ck)\mathbf{a}$

  $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

7.9 벡터공간, 내적공간, 일차변환

- 실내적공간(Real Inner Product Space)

내적(Inner Product): $(\mathbf{a},\mathbf{b})$

1. 선형성 $(q_1\mathbf{a}+q_2\mathbf{b},\mathbf{c}) = q_1(\mathbf{a},\mathbf{c}) + q_2(\mathbf{b},\mathbf{c})$
2. 대칭성 $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$
3. 양의정치성 $(\mathbf{a},\mathbf{a}) \ge 0,$

   $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$일 필요충분조건은 $\mathbf{a} = 0$

- **직교**(Orthogonal) : 내적이 영인 두 벡터
- 벡터의 길이 또는 노름(Norm) : $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}$
- **단위벡터**(Unit Vector) : 길이가 1인 벡터

7.9 벡터공간, 내적공간, 일차변환

- 기본부등식

- Cauchy-Schwarz 부등식 : $|(\mathbf{a},\mathbf{b})| \le \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$
- 삼각부등식 : $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$
- 평행사변형 등식 : $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2\right)$

7.9 벡터공간, 내적공간, 일차변환

- **일차변환**(Linear Transformations)
- **X**에서 **Y**로의 사상 또는 변환, 연산자

  : 공간 **X**의 벡터 ***x***에 대하여 공간 **Y**의 유일한 벡터 ***y***를 대응
- *F*를 선형사상 또는 일차변환

  : **X** 의 임의의 벡터 ***v***, ***x*** 와 임의의 스칼라 *c*에 대하여 다음의 식을 만족

  $$* \quad F(\mathbf{v}+\mathbf{x}) = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{x})$$

  $$* \quad F(c\mathbf{x}) = cF(\mathbf{x})$$

- $\mathbf{R}^n$ 공간에서 $\mathbf{R}^m$ 공간으로의 일차변환
- 일차변환은 선형이다.
- 일차변환 F 는 $m \times n$ 행렬 **A**에 의해 주어진다.