

초등 수학 내용 전문성 향상 과정
(초5~6학년군)

- 수와 연산 영역 내용과 배경지식 탐구 (2) -

LESSON 1.

약수와 최대공약수

LESSON 2.

배수와 최소공배수



1

약수와 최대공약수

목차

1. 약수 및 최대공약수와 관련한 2015 개정 수학과 교육과정 성취기준
2. 약수의 개념과 지도방법
3. 최대공약수의 개념과 지도방법

1. 2015 개정 수학과 교육과정 성취기준 살펴보기(약수와 최대공약수)

2015 개정 수학과 교육과정 5-6학년군 약수 및 최대공약수와 관련한 성취기준을 살펴보면 다음과 같다.

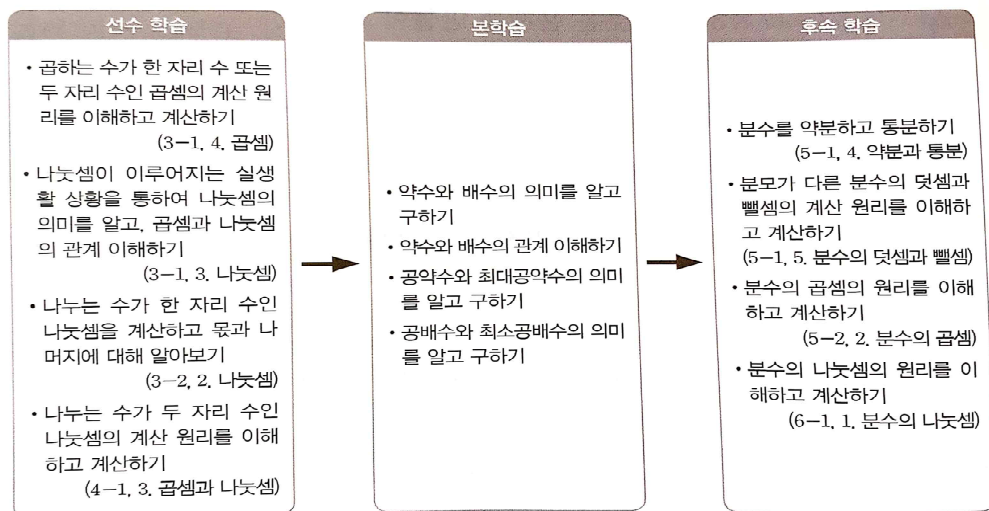
2015 개정 수학과 교육과정	
성취기준	[6수01-02] 약수, 공약수, 최대공약수의 의미를 알고 구할 수 있다. [6수01-04] 약수와 배수의 관계를 이해한다.

교수·학습 방법 및 유의사항으로는 다음과 같다.

- 약수는 실생활에서 활용되는 경우를 찾아 자연수 범위에서 다룬다.
- 최대공약수는 두 수에 대해서 구하게 한다.

평가 방법 및 유의사항으로는 최대공약수에 대한 평가에서 소인수의 곱으로 나타내어 구하는 방법은 다루지 않는다.

단원학습의 계열은 다음과 같다.



2. 약수의 개념과 지도방법

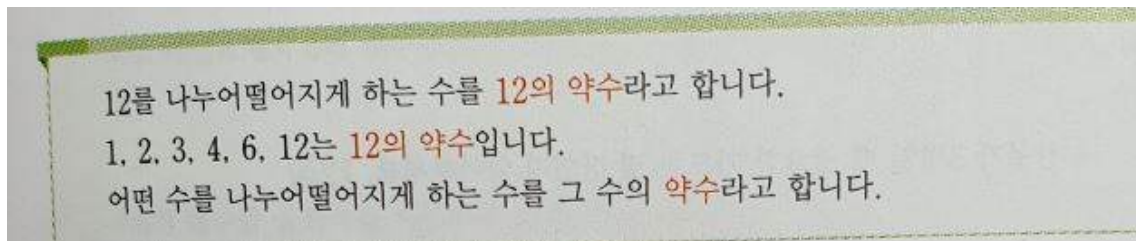
가. 약수(공약수, 최대공약수)의 개념

약수를 수학적으로 정의하면 $N=\{1, 2, 3, \dots\}$ 에서 $a, b \in N$ 에 대하여 $b=ac$ 인 $c \in N$ 이 존재할 때, a 를 b 의 약수라 한다. 어떤 두 수 a, b 의 공약수란 a 의 약수도 되고, b 의 약수도 되는 수를 말한다. 공약수 중에서 가장 큰 수를 최대공약수라고 한다.(김성준 외 7인, 2013).

약수는 초등학교 수학과 교육과정의 수와 연산 영역에서 전통적으로 5학년에서 지도되어 왔다. 학생들이 하위 학년에서 이미 학습한 곱셈과 나눗셈의 연산 개념을 바탕으로 정의되며, 후속학습으로 5학년의 약분과 통분, 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈의 기초가 되며, 중학교에서 다항식의 약수와 배수 학습의 기초가 되기도 한다.

이번 단원 지도에서 특히 유의할 점은 자연수의 범위에서만 약수를 다루는 것이다. 아직 정수를 배우지는 않았으므로, 예를 들어 -2 가 4 의 약수인지는 중요한 문제로 제기되지 않을 수 있다.

교과서에 제시되고 있는 약수의 개념은 아래와 같다.



약수란 어떤 수를 나머지 없이 나누는 수로 나머지가 0이 되도록 나누어떨어지게 하는 수를 말한다. 약수는 한자로 約數(몫을 약, 셀 수)라고 쓴다.

학생들에게 지도할 때, 약수는 어떤 하나의 수에 대해 생각한다는 것을 인지시켜야 한다. 이는 후속 개념인 공약수, 최대공약수가 둘 이상의 수에 대한 개념이기 때문이다.

나. 약수 지도를 위한 소재

약수를 비롯하여 배수, 최대공약수와 최소공배수 지도에 모두 좋은 소재는 직사각형 모양의 타일을 붙이는 상황이다. 예를 들어 가로가 18cm, 세로가 12cm인 직사각형 모양의 벽에 정사각형 모양의 타일을 붙여서 가득 메울 때 이용할 수 있는 가장 큰 정사각형 모양의 타일의 한 변은 18과 12의 최대공약수인 6cm이다. 또한 가로가 12cm, 세로가 9cm인 직사각형 모양의 타일을 여러 개 붙여서 정사각형 모양을 만들 때, 만들 수 있는 가장 작은 정사각형 모양의 한 변은 12와 9의 최소공배수인 36cm이다. 다만 이 단원은 아직 학생들이 도형의 넓이를 배우지 않은 단계이므로 길이에 초점을 두어 지도할 필요가 있다.

다. 약수의 지도 범위

약수와 배수는 정수와 관련된 내용이지만 초등학교 수준에서는 그 범위를 자연수로 제한하여 학습한다.

$a, b \in \mathbb{Z}$ (정수 집합)에 대하여 $b=ac$ 인 정수 c 가 존재할 때 a 를 b 의 약수(divisor) 또는 인수(factor)라고 하고, b 를 a 의 배수(multiple)라고 한다. 또, 이를 $a|b$ 로 나타내고, ' a 는 b 를 나눈다' 또는 ' b 는 $a(a \neq 0)$ 로 나누어 떨어진다'고 한다.

라. 약수의 지도 방법

1) 구체물을 똑같이 나누는 방법 알아보기

교과서의 지도방법처럼 카드 12장을 똑같이 나누어 주어야 하는 상황에서 어떻게 하면 똑같이 나누어 줄 수 있는지 알아본다. 카드 12장을 남거나 부족하지 않게 나누어 주는 상황에서 약수의 개념을 이해하도록 지도한다.

[지도를 위한 주요 발문]

- 카드 12장을 1명에게 준다면 1명이 가지는 카드는 몇 장인가요?
- 카드 12장을 2명에게 똑같이 나누어 줄 수 있는지 알아보세요.

2) 나눗셈 식을 이용하여 약수 구하기

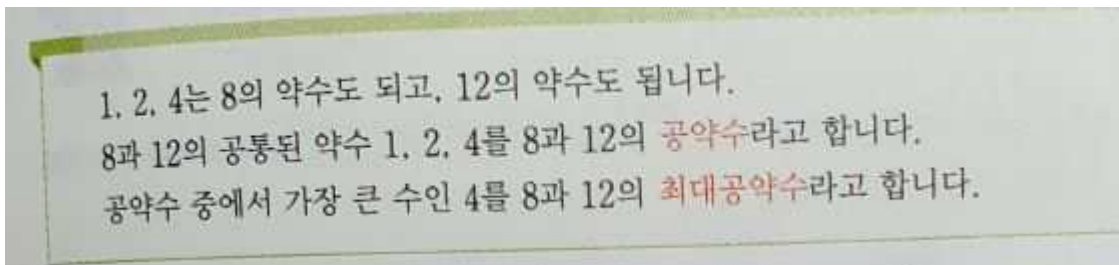
[지도를 위한 주요 발문]

- 카드 12장을 친구 몇 명에게 남김없이 똑같이 나누어 줄 수 있는지 알아보려면 어떻게 해야 하나요?
- 12를 나누어떨어지게 하는 수를 구하는 나눗셈 식은 무엇인지 말해봅시다.

3. 최대공약수의 개념과 지도방법

가. 최대공약수의 개념

교과서에 제시되어 있는 공약수 및 최대공약수의 개념은 아래와 같다.



나. 두 수의 최대공약수 지도방법

최대공약수는 크게 두 가지 방법으로 지도한다. 하나는 두 수의 공약수나 공배수를 구한 다음 가장 큰 공약수나 가장 작은 공배수를 찾는 것이다. 다른 하나는 두 수를 각각 소인수 분해한 다음 공통으로 들어 있는 약수의 곱을 구하거나 이를 이용하여 최소공배수를 구하는 것이다.

예를 들어 12와 18의 최대공약수를 구하는 경우 12와 18을 각각 약수의 곱으로 나타내는 다음의 두 가지 방법을 생각해 볼 수 있다.

방법1	$12 = 2 \times 6$ $18 = 3 \times 6$ \downarrow \downarrow 12와 18의 최대공약수	방법2	$12 = 2 \times 2 \times 3$ $18 = 2 \times 3 \times 3$ \parallel \parallel 6 6 \downarrow \downarrow 12와 18의 최대공약수
-----	---	-----	---

12와 18을 약수들의 곱으로 나타낼 때 **방법2**는 소인수분해한 것인 반면, **방법1**은 소인수가 아닌 약수의 곱으로 나타낸 것이다. 교육과정의 위계에서 학생들이 소수 또는 소인수분해를 다루는 것은 중학교이며, 이에 따라 5학년에서 소인수분해를 유도하는 것은 교육

과정에 위배될 수 있다. 따라서 학생들은 두 수를 소인수 또는 소인수가 아닌 약수의 곱으로 분해한 다음 공통으로 들어 있는 가장 큰 수를 찾으면 된다. 위의 두 가지 방법은 각각 다음의 두 가지로 알고리즘화될 수 있다.

방법1

12와 18의 공약수 → $\begin{array}{r} 6 \overline{) 12 \ 18} \\ \underline{2 \ 3} \end{array}$

$6 \Rightarrow$ 12와 18의 최대공약수

방법2

12와 18의 공약수 → $\begin{array}{r} 2 \overline{) 12 \ 18} \\ \underline{6 \ 9} \end{array}$

6과 9의 공약수 → $\begin{array}{r} 3 \overline{) 6 \ 9} \\ \underline{2 \ 3} \end{array}$

$2 \times 3 = 6 \Rightarrow$ 12와 18의 최대공약수

학교에서는 공약수의 개념을 먼저 학습하고, 공약수 구하는 방법을 익힌 다음, 생활에 적용하는 문제를 해결하는 순서로 학습한다. 그 결과, 공약수와 관련된 문제는 반드시 공약수를 구하는 알고리즘을 적용하려 하고, 이를 알지 못하면 문제 해결이 어렵다. 그러나, 공약수나 공배수 개념을 모르더라도 조작 활동을 통하여 해결할 수 있다. 따라서, 조작 활동을 통하여 문제를 해결하는 가운데 공배수나 공약수를 학습하는 것이 자연스런 학습 순서일 것이다. 교과서에 제시되어 있는 최대공약수 지도 방법은 아래와 같다.

- 1) 두 수의 곱으로 나타낸 곱셈식을 이용하여 최대공약수를 구하는 방법 알아보기
주어진 두 수의 곱으로 나타낸 곱셈식에 공통으로 들어 있는 수 중에서 가장 큰 수를 찾아 최대공약수를 구할 수 있도록 안내한다.
- 2) 여러 수의 곱으로 나타낸 곱셈식을 이용하여 최대공약수를 구하는 방법 알아보기
주어진 두 수의 크기가 커서 두 수의 곱으로 나타내기 어려운 경우 여러 수의 곱으로 나타낸 곱셈식 중에서 공통으로 들어 있는 곱셈식을 찾아 최대공약수를 구할 수 있도록 안내한다. 이 방법은 사실은 남은 수가 서로 소가 될 때까지 처음 방법을 반복적으로 사용하는 것과 같다.
- 3) 최대공약수를 여러 가지 방법으로 구하기
최대공약수의 의미를 알고, 여러 가지 방법으로 최대공약수를 구할 수 있도록 지도한다.

2

배수와 최소공배수

목차

1. 배수 및 최소공배수와 관련한 2015 개정 수학과 교육과정 성취기준
2. 배수의 개념과 지도방법
3. 최소공배수의 개념과 지도방법

1. 2015 개정 수학과 교육과정 성취기준 살펴보기(배수와 최소공배수)

2015 개정 수학과 교육과정 5-6학년군 배수 및 최소공배수와 관련한 성취기준을 살펴보면 다음과 같다.

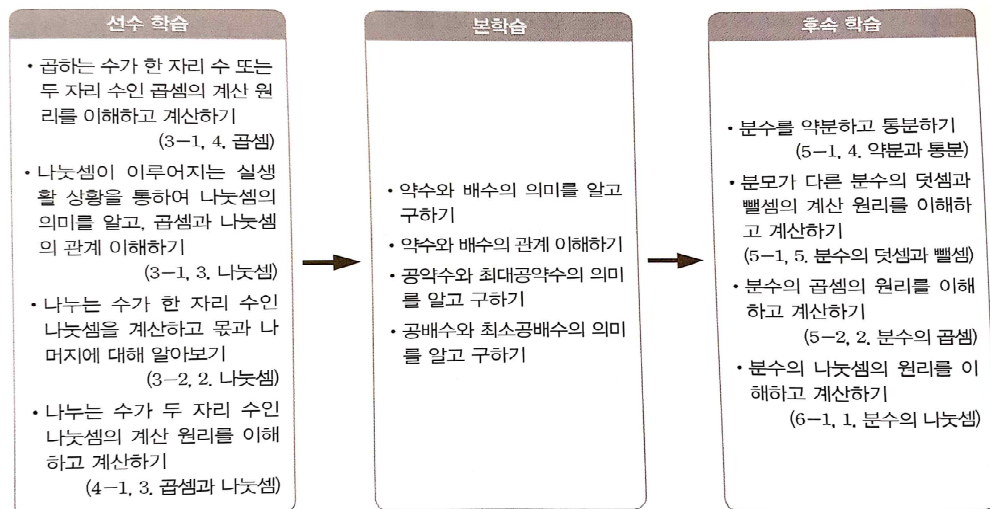
2015 개정 수학과 교육과정	
성취기준	[6수01-03] 배수, 공배수, 최소공배수의 의미를 알고 구할 수 있다. [6수01-04] 약수와 배수의 관계를 이해한다.

교수·학습 방법 및 유의사항으로는 다음과 같다.

- 배수는 실생활에서 활용되는 경우를 찾아 자연수 범위에서 다룬다.
- 최소공배수는 두 수에 대해서 구하게 한다.

평가 방법 및 유의사항으로는 최소공배수에 대한 평가에서 소인수의 곱으로 나타내어 구하는 방법은 다루지 않는다.

단원학습의 계열은 다음과 같다.



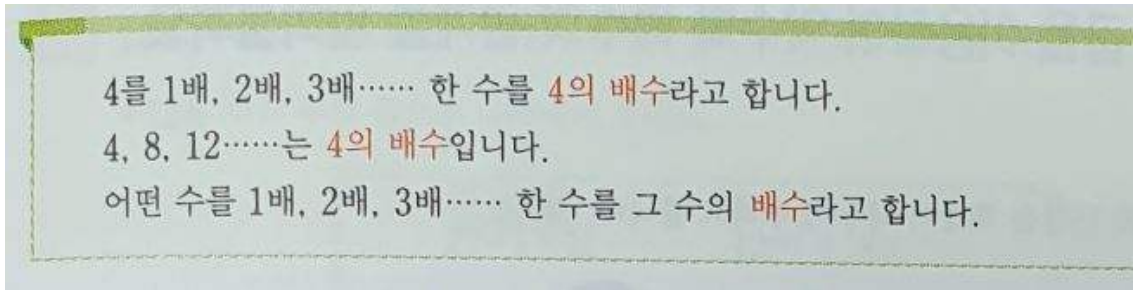
2. 배수의 개념과 지도방법

가. 배수(공배수, 최소공배수)의 개념

배수를 수학적으로 정의하면 $N=\{1, 2, 3, \dots\}$ 에서 $a, b \in N$ 에 대하여 $b=ac$ 인 $c \in N$ 이 존재할 때, b 를 a 의 배수라 한다. 어떤 두 수 a, b 의 공배수란 a 의 배수도 되고, b 의 배수도 되는 수를 말한다. 공배수 중에서 가장 작은 수를 최소공배수라고 한다(김성준 외 7인, 2013).

이번 단원 지도에서 특히 유의할 점은 자연수의 범위에서만 배수를 다루는 것이다. 아직 정수를 배우지는 않았으므로, 예를 들어 -2 가 4 의 약수인지는 중요한 문제로 제기되지 않을 수 있다. 그러나 $8 \times 0 = 0$ 이라는 사실로부터 0 은 8 의 배수인지를 궁금해할 수는 있을 것이다. 수학적으로 0 은 모든 수의 배수이지만 이번 단원 지도에서는 강조하지 않도록 유의할 필요가 있다.

교과서에 제시되고 있는 배수의 개념은 아래와 같다.



배수란 어떤 수가 그 수만큼 거듭되어 커지는 수를 말한다. 배수는 한자로 倍數(곱 배, 셀 수)라고 쓴다. 培(배)는 곱한다는 뜻으로 똑같은 수가 거듭해 커진다는 뜻이다.

나. 배수의 지도방법

1) 곱셈식을 이용하여 배수 알아보기

카드 놀이를 하는 교과서의 상황을 예를 들어 보자.

카드 놀이를 하려면 1명에게 4장의 카드가 필요합니다. 필요한 카드의 수를 알아봅시다.

[지도를 위한 주요발문]

- 카드 놀이를 하려면 1명이 카드를 몇 장 가져야 하나요?
- 친구가 1명일 때 필요한 카드는 몇 장인지 알아보세요.
- 친구가 2명일 때 필요한 카드는 몇 장인지 알아보세요.
- 4를 몇 배 한 수를 곱셈식으로 알아보세요.

곱셈식을 나타낼 때 차례대로 쓰지 않고 5배, 6배, 7배...한 곱셈식도 정답으로 인정한다.

2) 수 배열표에서 배수 찾기

다음과 같은 수 배열표를 제시한 후 어떤 수의 배수를 찾게 한다. 교과서에서는 6의 배수를 알아보고 있다.

수 배열표에서 6의 배수를 찾아봅시다.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

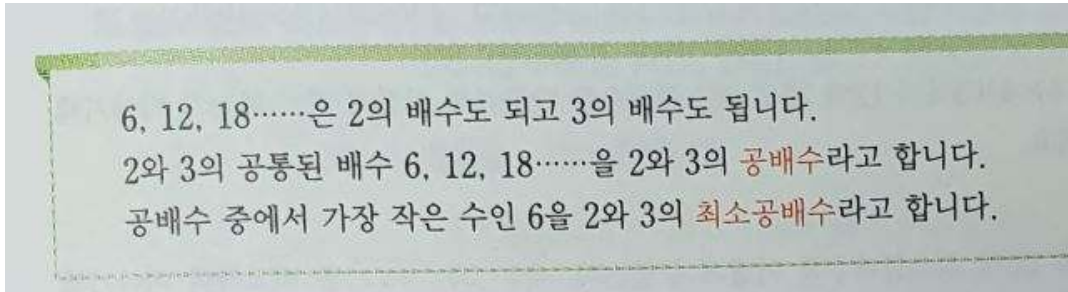
수 배열표에서 6의 배수를 모두 찾아 색칠해 보세요.

이 외에도 배수를 이용한 문장 만들기, 배수에서 손뼉치기 등의 활동을 통해 배수를 익힐 수도 있다.

3. 최소공배수의 개념 및 지도방법

가. 최소공배수의 개념

교과서에 제시되어 있는 공배수 및 최소공배수의 개념은 아래와 같다.



나. 최소공배수의 지도방법

최소공배수를 구하는 방법을 지도할 때 이번 교과서에서 시도하는 방법을 명확히 이해하고 지도할 필요가 있다. 학교 수학에서 최소공배수를 구하는 방법은 크게 두가지로 지도한다. 하나는 두 수의 공배수를 구한 다음 가장 작은 공배수를 찾는 것이다. 다른 하나는 두 수를 각각 소인수 분해한 다음 공통으로 들어 있는 약수의 곱을 구하거나 이를 이용하여 최소공배수를 구하는 것이다. 이번 단원에서는 이 두 가지 방법의 중간 단계의 방법을 적용하고 있다. 하지만 최소공배수를 구할 때 소인수 분해만을 이용하지 않도록 유의할 필요가 있다. 예를 들어, 12와 20의 최소공배수를 구하는 경우 12와 20을 각각 약수의 곱으로 나타내는 다음의 두 가지 방법을 생각해 볼 수 있다.

방법1

$$12 \text{와 } 20 \text{의 공약수} \rightarrow \begin{array}{r} 4 \overline{) 12 \quad 20} \\ \underline{3 \quad 5} \end{array}$$

$$4 \times 3 \times 5 = 60 \Rightarrow 12 \text{와 } 20 \text{의 최소공약수}$$

방법2

$$12 \text{와 } 20 \text{의 공약수} \rightarrow \begin{array}{r} 2 \overline{) 12 \quad 20} \\ \underline{6 \quad 10} \\ 3 \quad 5 \end{array}$$

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60 \Rightarrow 12 \text{와 } 20 \text{의 최대공배수}$$

방법1

$$12 = 3 \times 4 \quad 20 = 4 \times 5$$

$$3 \times 4 \times 5 = 60 \Rightarrow 12 \text{와 } 20 \text{의 최소공배수}$$

방법2

$$12 = 3 \times 2 \times 2 \quad 20 = 2 \times 2 \times 5$$

$$3 \times 2 \times 2 \times 5 = 60 \Rightarrow 12 \text{와 } 20 \text{의 최소공배수}$$

위의 두 가지 방법 중 **방법2**는 소인수분해한 것인 반면, **방법1**은 소인수가 아닌 약수의 곱으로 나타낸 것이다. 위의 두 가지 방법은 각각 다음의 두 가지로 알고리즘화될 수 있다. 교과서에 제시되어 있는 최소공배수 지도 방법은 아래와 같다.

1) 두 수의 곱으로 나타낸 곱셈식을 이용하여 최소공배수 구하는 방법 알아보기

주어진 두 수를 두 수의 곱으로 나타낸 곱셈식 중에서 공통으로 들어있는 수가 가장 큰 식을 찾아 공통인 수와 남은 수를 곱하여 최소공배수를 구할 수 있도록 안내한다. 12와 20

을 예로 들어볼 때, 12와 20을 다른 두 수의 곱으로 나타낸 곱셈식으로 풀어도 공배수를 구할 수 있음을 지도한다.

2) 여러 수의 곱으로 나타낸 곱셈식을 이용하여 최소공배수 구하는 방법 알아보기

주어진 두 수의 크기가 커서 두 수의 곱으로 나타내기 어려운 경우 여러 수의 곱으로 나타낸 곱셈식 중세서 공통으로 들어 있는 곱셈식을 찾아 공통인 수와 남은 수를 곱하여 최소공배수를 구할 수 있도록 안내한다.

3) 최소공배수를 여러 가지 방법으로 구하기

최소공배수의 의미를 알고, 여러 가지 방법으로 최소공배수를 구할 수 있도록 지도한다.

초등학교에서 (최소)공배수는 분수의 덧셈, 뺄셈이나 약분하는데 주로 이용되고 있다. 그러나, 이 개념은 분수 문제에 국한되는 것이 아니고, 수학적 아이디어가 다른 수학적 아이디어와 연결되어 있음을 보여주는 데 적절하다.